Johan Karlander, Nada, KTH

Lösningsförslag till tenta i 5B1305 Tillämpad Kombinatorik, 2004–05–24

1. a Ett bra trick för att beräkna genererande funktionen till $b_n = a_0 + a_1 + \dots a_n$ om man känner till $A(x) = a_0 + a_1 x + \dots$ är att $B(x) = \frac{A(x)}{(1-x)}$. I vårt fall har vi först $0 + 1 \cdot x + 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x^3 + \cdots = x(1 + 2 \cdot x + 3 \cdot x^2 + \dots) = xD\frac{1}{(1-x)} = \frac{x}{(1-x)^2}$. Sedan fås då $t_1 x + t_2 x^2 + t_3 x^3 + \cdots = \frac{x}{(1-x)^3}$

   b På samma sätt fås $s_1 x + s_2 x^2 + s_3 x^3 + \cdots = \frac{x}{(1-x)^4}$.

2. Enklast är att använda den s.k. exponentialformeln som talar vad exp. gen. funk. blir när man kombinerar olika enkla grundstrukturer till en sammansatt struktur. I vårt fall har vi den exponentiellt genererande funktionen $A(x) = \frac{(3-1)!}{3!} x^3 = \frac{x^3}{3}$ som exp. gen. funk. till grundstrukturen. Exp. gen. funk. (och svaret) blir då enligt exponentialformeln $e^{A(x)} = e^{\frac{x^3}{3}}$.

3. Från föreläsningarna (och föreläsningsanteckningar) vet vi att $e \leq 2v - 4$ för planära grafer där ingen sida är en triangel. Antag nu att alla noder har grad ≥ 4. Då måste $2e \geq 4v$ d.v.s. $e \geq 2v$. Men då skulle $2v \leq 2v - 4$. Det betyder att i vår graf måste det finnas minst en nod av grad ≤ 3. Använd induktion över storleken på grafen. Givet G låt x vara en nod med grad ≤ 3. Enligt induktionsantagandet kan $G - x$ färgas med 4 färger. Men då finns minst en färg ledig att färga x med. Så G kan 4-färgas.

4. Det går lätt att se att $(X_i \cup X_2, Y_1 \cap Y_2)$ är ett snitt, d.v.s. att $s \in X_1 \cup X_2,\ t \in Y_1 \cap Y_2$ och $(X_1 \cup X_2) \cap (Y_1 \cap Y_2) = \emptyset$.

   Antag nu att vi har ett maximalt flöde f. Om e är en kant från $X_1 \cup X_2$ till $Y_1 \cap Y_2$ kan vi anta att den går från X_i till Y_1 där $i = 1$ eller 2. Eftersom vi har ett maximalt flöde och båda snitten är minimala måste $f(e) = c(e)$. Om e är en kant som går från $Y_1 \cap Y_2$ till $X_1 \cup X_2$ kan vi anta att kanten går från Y_i till X_i. Men på samma sätt ser vi här att $f(e) = 0$ måste gälla.

   Det betyder att $|f| = C(X_1 \cup X_2, Y_1 \cap Y_2)$. Men då måste det nya snittet också vara minimalt.

5. Problemet är en variant av problemet att partitionera en mängd. Vi delar upp i 2 fall:

   1. Unionen av våra valda mängder är hela grundmängden. Det finns $S(n, k)$ sådana val av mängder.

   2. Unionen av våra valda mängder är inte hela grundmängden. Då kan problemet transformeras till att vi partitionerar grundmängden i $k + 1$ (icke-tomma) delar och sedan väljer en del som inte skall vara med. Det kan göras på $(k + 1)S(n, k + 1)$ st sätt.

   Totalt fås alltså $(k+1)S(n, k+1) + S(n, k)$ sätt. Enligt rekursionsformeln för Stirlingtal är detta $S(n + 1, k + 1)$. Detta är svaret. (Det går att se på andra sätt också.)

6. a Det som definierar ett distributivt lattice är att
   $(x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ och
   $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ för alla x, y, z.

   b Ett sätt att visa det är följande:
   Antag att $a \vee c = b \vee c$ och $a \wedge c = b \wedge c$.
   Vi vet att $a = a \wedge (a \vee c) = a \wedge (b \vee c)$
   Eftersom vi har distributivitet är detta $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = (a \wedge b) \vee (b \wedge c)$.
   Men distributiviteten ger nu att detta är $b \wedge (a \vee c) = b \wedge (b \vee c) = b$.
   Det visar alltså att $a = b$.

7. Svaret är nej. Det enkla skälet till det är att i ett STS måste antalet element i grundmängden vara udda. Detta måste det vara eftersom man kan visa att i ett STS ligger varje element i $\frac{(n-1)}{2}$ tripplar.

8. Det går ganska enkelt att se att det finns 10 st avbildningar totalt. Den första är Id som har cykelformen X_1^5. Sedan är det 4 rotationer som har formen X_5. Slutligen är det 5 st speglingar som har formen $X_1X_2^2$. (Man skulle kunna tänka sig att kombinationer av rotationer och speglingar skulle ge ytterligare avbildningar men intressant nog kommer inga nya avbildningar att uppstå.) Svaret blir $Z_G = \frac{1}{1}(X_1^5 + 5X_1X_2^2 + 5X_5)$.