Hemtal 2. Tillämpad Kombinatorik

Skall vara inlämnat senast den 17 maj.

1. (2p)

   Antag att vi placerar ut 6 punkter i planet i heltalspunkter (d.v.s. punkter med heltalskoordinater). Vi antar att punkterna placeras så att inte tre av dem ligger på samma linje. Visa att det bland punkterna finns en triangel som enbart har sidor av heltalslängd eller en triangel vars sidor alla är irrationella tal.

2. (2p)

   I assignementproblemet med n på vardera sidan har vi en produktionsmatris a_{ij}. Vi antar att de olika aktörerna är indexerade $p_1, \dots p_n$ och $q_1 \dots q_n$. Definiera en preferensordning på P-aktörer så att p_i föredrar q_j framför $q_{j'}$ om $a_{ij} > a_{ij'}$. Vi gör på samma sätt för Q-aktörer. Detta ger en instans av problemet stabil äktenskapsmatchning. Visa att det kan inträffa att en stabil lösning till det ena problemet inte är en stabil lösning till det andra problemet och vice versa.

3. (2p)

   En balanserad matris är en matris där varje summa av elementen på rader och kolumner är samma. T.ex:

   $$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   En permutationsmatris är en kvadratisk matris med exakt en 1:a i varje rad och kolumn och 0:or i övriga positioner. Antag att A är en kvadratisk balanserad matris med heltal ≥ 0 i alla positioner. Visa att det finns permutationsmatriser $P_1, P_2, \dots P_k$ och tal $b_1, \dots b_k$ så att $A = b_1 P_1 + \dots b_k P_k$.

4. (2p) Visa att inget kromatiskt polynom $P_G(t)$ kan ha ett nollställe mellan 0 och 1.

   Tips: Undersök några enkla fall och se vad som händer mellan 0 och 1 beroende på om antalet noder är jämnt eller udda. Använd sedan rekursionsformeln och induktion.

   (Obs: Det är fel att tro att alla kromatiska polynom bara kan ha nollställen i heltal. Det finns t.ex. kromatiska polynom som har nollställen mellan 1 0ch 2. Men som sagt inga mellan 0 och 1.)

5. (1p)

   Visa att om G är en enkel sammanhängande planär graf så är $\sum_v (6 - d(v)) \geq 12$, där $d(v)$ är v:s grad.

6. (1p)

   Bestäm vad kromatisk polynomet för en cykel av längd n är. (D.v.s. hitta ett generellt uttryck för det kromatiska polynomet som beror på n.)

7. (2p)

   Låt P_n vara den partiellt ordnade mängd som består av heltalspar (x, y) där $1 \leq x, y \leq n$. Vi definierar $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ att gälla om och endast om $x1 \leq x_2$ och $y_1 \leq y_2$.

   Visa att den maximala antikedjan i P_n har storlek n. (Tips: Börja med att skissa Hasse-diagrammet för P_n för små n.)

8. (1p) Beräkna antalet sätt att färga kanterna i en kub med två färger. (Det handlar förstås om färgningar som är särskiljbara under rotationer. Se Cameron kap 15.)

9. (2p) Vi arbetar med 2×3-matriser som har något av talen 0 eller 1 i varje position. Vi definierar en symmetrigrupp på matriserna som består av omflyttning av rader och kolumner. Beräkna cykelindex och använd det för att beräkna hur många olika matriser det finns som inte är ekvivalenta under G