

Hemtal 1. Tillämpad Kombinatorik

Skall vara inlämnat senast den 30 april.

1. (1p)

Visa att

$$\sum_{k=m}^n \binom{k}{m} \binom{n}{k} = \binom{n}{m} 2^{n-m}$$

2. (1p)

Här är ett partitionsproblem: Visa att $p(n) - p(n-1)$ alltid är lika med antalet sätt att partitionera n på så sätt att alla termer är ≥ 2 .

3. (1p)

Antag att vi har en mängd F med m st olika k -delmängder av $\{1, \dots, n\}$. Vi säger att en $(k-1)$ -delmängd A ligger i skuggan av F om A är en delmängd av någon mängd i F . Går det med hjälp av denna information att avgöra hur många $(k-1)$ -mängder som ligger i skuggan av F ? Om det går, hur många är det då?

4. (3p)

Utred slumpvandring i 2 och 3 dimensioner. I 2 dimensioner har vi fyra olika riktningar att gå i. De är alla lika sannolika. I tre dimensioner har vi sex riktningar.

Visa att om vi startar i origo i det 2-dimensionella fallet så kommer vi med sannolikhet 1 tillbaka till origo.

Visa att i det 3-dimensionella fallet är sannolikheten för att komma tillbaka till origo mindre än 1.

5. (2p)

I kap 7.2 i boken finns ett aningen skissartat bevis för att det inte kan finnas en antikedja av storlek $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ som innehåller **både** mängder av storlek $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ och $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ när n är udda. Ge ett fullständigt bevis för detta.

6. (1p)

Lös uppgift 4.8.20. (Strunta i delen Harder Exercise)

7. (2p)

Med en triangulering av en konvex polygon menar man en uppdelning av den i trianglar. Beräkna antalet sätt att triangulera en konvex polygon med n numrerade hörn.

8. (1p) Antag att M_1, M_2, \dots utgör ett Steinerskt trippelsystem på $\{1, \dots, n\}$. Vi tittar nu på mängden $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots$ som består av komplementen till mängderna. Visa att denna mängd av mängder utgör en $2 - (n, n-3, \lambda)$ design. Vad är λ ? Hur många block finns det?

9. (1p)

Låt s_n beteckna antalet sekvenser (x_1, x_2, \dots, x_n) där $x_i = 0, 1$ eller 2 och antalet nollor är jämnt. bestäm en exponentiellt genererande funktion för p_n . Beräkna även p_n explicit.

10. (2p)

Lös uppgift 5.6.11 i boken.