Designteori: Kirkmans skolflickeproblem

Följande problem formulerades av Kirkman 1847:
Vi har en skolklass med 15 flickor. De går varje dag en promenad i 5 grupper om 3 flickor i varje.
Går det att ordna ett schema för promenader under 7 dagar så att varje par av flickor går tillsammans exakt en dag?
Obs: 7 dagar kommer att krävas. Men är det möjligt?

Intressanta följdproblem

Det finns en lösning på problemet som bygger på utnyttjandet av två andra strukturer. Dessa är

- Steinerska trippelsystem.
- Turneringar.

Båda dessa strukturer studeras inom designteori. De var kända redan av Kirkman och utgör en del av den klassiska kombinatoriken. Deras tillämpningar sträcker sig långt utöver Kirkmans ursprungliga problem.

Steinerska trippelsystem

Om vi har n st element är ett Steinerskt trippelsystem (STS) en mängd av tripplar (delmängder av storlek 3) så att varje par av element ligger i exakt en trippel.

Turneringar

Om vi har n st element är en turnering en uppdelning i ett minimalt antal omgångar där varje omgång består av disjunkta par och så att varje par finns med i exakt en omgång.
Mer exakt:
Om n är jämnt har vi $n-1$ omgångar var och en bestående av $\frac{n}{2}$ par.
Om n är udda har vi n omgångar var och en bestående av $\frac{(n-1)}{2}$ par.

Skiss till lösning av Kirkmans problem

Man kan dela in flickorna i en grupp A om 7 flickor och en grupp B om 8 flickor.
Till A konstruerar man ett STS med 7 tripplar.
Till B konstruerar man en turnering i 7 omgångar med 4 par i varje omgång.
Sedan bildas 35 tripplar genom att
1. Vi tar de 7 som kommer från A.
2. Vi kombinerar varje omgång i B med en flicka från A. Flickan sorteras sedan in i de 4 paren i sin omgång. Det ger de övriga 28 tripplarna.

Dessa tripplar bildar ett STS på mängden av 15 flickor. Problemet som återstår är att dela in tripplarna i dagar.

Analys av turneringar

Går turneringar alltid att konstruera? Ja, ganska enkelt.
Vi tänker oss att elementen är numrerade $0, 1, \cdots n-1$.
Antag först att n är udda. För varje tal k finns det $\frac{(n-1)}{2}$ par (x, y) så att $x + y \equiv k \,(mod\, n)$
Dessa par utgör omgång k för k $0 \leq k \leq n-1$.
Antag att n är jämnt. Tag bort $n-1$. Använd ovanstående metod på de $n-1$ återstående talen. Givet k finns det unikt i så att $2i \equiv k \,(mod\, n)$. Lägg till paret $(i, n-1)$ till omgången.

Analys av STS

För vilka n finns det STS?
Hur många tripplar innehåller de?
I hur många tripplar ligger varje element?
Vi besvarar frågorna med dubbelräkning.

Dubbelräkningstekniken

Vi besvarar frågorna i omvänd ordning.
1. Fixera ett element x. Räkna antalet par (y, T) där $y \neq x$ och T är en trippel som innehåller både x och y.
a. Det finns $n-1$ val av y. Varje val ger unikt T. Det finns $n-1$ par.
b. Antag att x ligger i r tripplar. För varje trippel finns det 2 val av y. Det finns alltså $2r$ par.
$2r = n-1$ och $r = \frac{(n-1)}{2}$ oberoende av x.
2. Vi räknar antalet par (x, T) där T är en trippel som innehåller x.
a. Antag att det finns m tripplar. Varje trippel innehåller 3 element. Det finns alltså $3m$ par.
b. Varje element ligger i $\frac{(n-1)}{2}$ tripplar. Det finns därför $\frac{n(n-1)}{2}$ par.
$3m = \frac{n(n-1)}{2}$ och $m = \frac{n(n-1)}{6}$.

Nödvändigt krav för STS

Om det skall kunna finnas ett STS måste $n \equiv 1$ eller $3 \,(mod\, 6)$.
Det är lätt att visa för vi vet att både $\frac{(n-1)}{2}$ och $\frac{n(n-1)}{6}$ måste vara heltal.
Så n måste vara udda. n har då formen $6k+1, 6k+3$ eller $6k+5$. Men i det sista fallet är $n(n-1) = 6m+4$ och kan inte vara delbart med 6.
Alltså är $n = 6k+1$ eller $6k+3$.

Tillräckliga krav?

Är det nödvändiga kravet också tillräckligt? Det är det faktiskt. Det går att ange metoder för konstruktion av STS om $n \equiv 1$ eller $3 \,(mod\, 6)$. Men det är en komplicerad process. Vi ger ett exempel:
$n = 7$:
Följande är ett Steinerskt trippelsystem
$(0, 1, 3)$, $(0, 2, 6)$, $(0, 4, 5)$, $(1, 2, 4)$,
$(1, 5, 6)$, $(2, 3, 5)$, $(3, 4, 5)$
Detta STS kan beskrivas kompaktare. Det består av $(i, 1+i, 3+i) \,(mod\, 7)$ för $0 \leq i \leq 6$.

Generalisering av STS

Man kan tycka att kraven på ett STS är rätt speciella. De inbjuder till generaliseringar i olika riktningar:

- Istället för tripplar kan vi titta på mängder av storlek k.
- Istället för par kan vi tänka oss att det är t-mängder som skall ligga i k-mängderna. Kräver förstås att $t < k$.
- Istället för att kräva att varje mängd av storlek t skall ligga i exakt en mängd av storlek k kan vi kräva att den skall ligga i exakt λ st mängder.

Designs

En $t-(v,k,\lambda)$ design är ett system av k-delmängder av talen $\{1,\cdots v\}$ så att varje t-delmängd ligger i exakt λ st av k-delmängderna. k-delmängderna kallas **block**.
Ex: Ett STS är en $2-(v,3,1)$ design.
Ex: Så kallade reguljära familjer är $1-(v,k,r)$ designs.

Naturliga frågor

- Finns det designs för alla val av v, k, λ, t?
- Om de finns, hur många block innehåller de då?
- Ligger alla element i samma antal block? Vilket är det antalet i så fall?

Antal block per element

Fixera x. Låt r_x vara antalet block som x ligger i.
Dubbelräkna antalet par (T,B) där T är en t-delmängd som innehåller x och B är ett block som innehåller T.
1. T kan konstrueras på $\binom{v-1}{t-1}$ sätt. Till varje T finns λ block som innehåller T. Det ger $\lambda\binom{v-i}{t-1}$ par.
2. Det finns r_x block som innehåller x. För varje sådant kan T väljas på $\binom{k-1}{t-1}$ sätt. Det ger $r_x\binom{k-1}{t-1}$ par.
Så

$$r_x = \frac{\lambda\binom{v-1}{t-1}}{\binom{k-1}{t-1}}$$

Detta tal är oberoende av x. Vi kallar det r.

Antalet block

Vi dubbelräknar antalet par (T,B) där T är en godtycklig t-mängd.
1. Det finns $\binom{v}{t}$ st t-mängder. Var och en av dem ligger i λ block. Det ger $\lambda\binom{v}{t}$ par.
2. Det antar att det finns b block. Varje block innehåller $\binom{k}{t}$ st t-delmängder. Det ger $b\binom{k}{t}$ par.
Vi får

$$b = \frac{\lambda\binom{v}{t}}{\binom{k}{t}}$$

Nödvändiga krav på en design

Vi ser att $t < k < v$ skall gälla.
$\frac{\lambda\binom{v}{t}}{\binom{k}{t}}$ måste vara heltal.
Uttrycket för r kan förenklas. Vi ser att $vr = bk$.
Det ger att $\frac{bk}{v}$ måste vara heltal.
Dessa krav är nödvändiga. Men de är inte tillräckliga.
Ingen har lyckats formulera enkla krav på parametrarna som är både nödvändiga och tillräckliga för existens av en design.

Vi släpper på kraven

Antag att v, k, t är givna. Går det då att hitta λ så att en $t - (v, k, \lambda)$ design existerar?
Trivial lösning:
Tag alla k-delmängder. Varje t-delmängd ligger i $\lambda = \frac{v-t}{k-t}$ st k-delmängder.

Hårdare krav

Den triviala lösningen innehåller onödigt många block. Dessutom är vi intresserade av lösningar som inte är triviala. Sådana lösningar kan konstrueras med följande metod.
Bilda en $\binom{v}{t} \times \binom{v}{k}$-matris M som är indexerad efter t-delmängder och k-delmängder.
Sätt $m_{ij} = 1$ om t-delmängd nr i ligger i k-delmängd nr j. Sätt $m_{ij} = 0$ annars.
Matrisen har fler kolumner än rader. Det finns därför en icke-trivial lösning $\bar{x}$ till $M\bar{x} = \bar{0}$. Låt $-d$ vara det mest negativa talet i $\bar{x}$. Sätt $x'_i = x_i + d$. Då är $\bar{x}' \geq \bar{0}$.
Vi konstruerar nu en design:
Om $x'_j > 0$ så väljer vi x'_j st exemplar av k-mängd nr j.
Detta ger en design med $\lambda = \binom{v-t}{k-t}d$.
Obs: Detta kräver att vi tillåter att man kan välja flera kopior av k-delmängderna.
Om man inte tillåter det blir problemet mycket svårare.

Lösbart problem: Reguljära familjer

Vi vill konstruera en $1 - (v, k, r)$ design utan att använda flera kopior av k-delmängderna.
För att det skall fungera måste $b = \frac{vr}{k}$ vara ett heltal som är $\leq \binom{v}{k}$.
Välj ut b st olika k-delmängder. Kalla mängden med delmängder för F. För varje tal x beräknar vi r_x = antalet block som x är med i. Medelvärdet för r_x över alla x är r.
Om $r_x = r$ för alla x har vi hittat vår design. Om inte måste det finnas $r_x > r$ och $r_y < r$. Då finns det en mängd $U \cup \{x\} \in F$ så att $U \cup \{y\} \notin F$. byt då ut $U \cup \{x\}$ mot $U \cup \{y\}$ i F. Fortsätt ända tills $r_x = r$ för alla x.