

## Några problem

Föreläsningen ägnades åt detaljerad lösning av några problem. En kort sammanfattning ges nedan:

### Antal binära träd

Låt  $t_n$  vara antalet binära träd med  $n$  noder. Med binärt träd menar vi ett rotat träd där varje nod har 0, 1 eller 2 söner. Man särskiljer vänstersöner och högersöner. Med denna standard blir t.ex.  $t_2 = 2$ .

Ange en formel för  $t_n$ .

Lösningsskiss: Svaret är  $t_n = c_{n+1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ .

Ett sätt att visa det är att dela in trädet i vänster och höger delträd.

Det ger rekursionen

$$t_n = t_0 t_{n-1} + t_1 t_{n-2} + \cdots + t_{n-1} t_0$$

Vi definierar  $t_0 = 1$

Om vi gör variabelbytet  $t'_n = t_{n-1}$  ser vi att  $t'_n$  uppfyller samma rekursionsekvation som  $c_n$ . Det visar att  $t'_n = c_n$  och att  $t_n = t'_{n+1} = c_{n+1}$ .

Alternativt kan vi ange en bijektion mellan antalet produkter av  $n$  faktorer och antalet binära träd med  $n - 1$  noder. Det kan gå till så här:

En produkt kan beskrivas med ett binärt träd med  $n$  löv och där varje icke-löv har grad 2. Stryk alla löven i trädet. Det ger binärt träd med  $n - 1$  noder.

### Välformade parentesuttryck

Ett välformat parentesuttryck har formen  $((()((()()))))()$  t.ex.

Ett exempel på ett parentesuttryck som inte är välformat är  $((()))(())()$ .

Låt  $p_n$  vara antalet välformade parentesuttryck med  $n$  vänsterparenteser (och högerparenteser). Bestäm värdet på  $p_n$ .

Lösning: Svaret är också här  $p_n = c_{n+1}$ . Låt  $2k$  vara första positionen i strängen med parenteser där vänsterparenteserna matchar högerparenteserna.  $2 \leq 2k \leq 2n$ . Det finns  $p_{k-1} p_{n-k}$  sådana uttryck. Det ger rekursionen

$$p_n = p_0 p_{n-1} + \cdots + p_{k-1} p_{n-k} + \cdots + p_{n-1} p_0 \text{ där vi sätter } p_0 = 1.$$

Det är samma rekursion som för binära träd och har därför samma lösning.

### Problem 11 i från kap 4 i Cameron

Lösningsskiss:

a. För beräkning av  $s(n)$  delar vi in i två fall:

1. Sekvensen har  $x_k \leq n - 1$ . Det finns  $s(n - 1)$  sådana sekvenser.

2.  $x_k = n$ . Då måste  $x_{k-1} \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Det finns  $s(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$  sådana sekvenser.

Det ger  $s(n) = s(n - 1) + s(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ .

För att visa ekvationen för den genererande funktionen är det enklast att beräkna  $t^n$ -koefficienten för vänsterledet och högerledet och se att de blir lika. Villkoret för att de skall vara lika är precis rekursionsvillkoret.

b. Man kan genom experiment komma fram till hypotesen  $u(n) - u(n - 1) = \frac{s(n)}{2}$ .

För att visa det verkar det enklast(?) att definiera en typ av sekvenser som vi kallar v-sekvenser. De är sekvenser som uppfyller  $x_{i+1} > x_i$ . Vi kan definiera  $v(n)$  som antalet v-sekvenser med  $1 \leq x_i \leq n$ .

Vi kan skapa en bijektion mellan en sekvens  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$  och en v-sekvens genom att definiera  $(y_1, y_2, \dots, y_k) = (x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + x_2 + \dots + x_k)$ . Det går att se att  $(y_1, y_2, \dots, y_k)$  måste vara en v-sekvens.

Man kan nu se att  $u(n) - u(n - 1) = v(n - 1)$ . Det återstår då att visa att  $v(n - 1) = \frac{s(n)}{2}$  för alla  $n$ . Det kan visas genom induktion över  $n$ . (Använd rekursionsekvationen från a.)