

Genererande funktioner

Om $f(0), f(1), \dots, f(n)$ är en talföljd så är
 $F(x) = f(0) + f(1)x + f(2)x^2 + \dots + f(n)x^n + \dots$ dess genererande funktion.
Funktionen kan alltid skrivas på *serieform*
t.ex. $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$
och ibland på *sluten* form
t.ex. $-\log(1-x)$.

Kombinatorisk metod med gen funk

Vi vill beräkna $f(n)$ för alla (eller något) n .

- Dela upp problemet i delar som kan beskrivas med genererande funktioner.
- Kombinera delarna så att vi får en sluten form på en genererande funktion $F(x)$ till problemet.
- Utveckla $F(x)$ på serieform.

Exempel. Heltalssummor

Hur många lösningar har

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \quad x_i \geq 0?$$

Varje lösning har formen $a_1 + a_2 + \dots + a_k = n$.

Skriv $F_1(x) = (1+x^1+x^2+\dots+x^n)(1+x^1+x^2+\dots+x^n) \dots (1+x^1+x^2+\dots+x^n)$
(k faktorer)

Beräkna sedan x^n -koefficienten.

Begränsningen till $1 + x^1 + x^2 + \dots + x^n$ är egentligen onödig.

Sätt in $1 + x^1 + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$ istället.

$$F(x) = \frac{1}{1-x} \frac{1}{1-x} \dots \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^k}$$

$$\frac{1}{(1-x)^k} = (1-x)^{-k} = 1 + (-1) \binom{-k}{1} x^1 + \dots + (-1)^s \binom{-k}{s} x^s + \dots$$

$$(-1)^s \binom{-k}{s} = (-1)^s \frac{[-k]_s}{s!} = \frac{[k]_s}{s!} = \binom{n+k-1}{n}.$$

$$x^n\text{-koefficienten} = \binom{n+k-1}{n}$$

(Som vi sett tidigare)

Två metoder för att använda gen funk

- Hantering av "summor" produkter av genererande funktioner.
- Lösning av rekursionsekvationer.

Rekursionsekvationer

Repetition av lite kända saker.

Klassiskt exempel: Fibonacci.

$$f(0) = 1, f(1) = 1, f(2) = 2, \dots$$

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2).$$

$$F(x) = f(0) + f(1)x + f(2)x^2 + \dots$$

$$f(n)x^n = f(n-1)x^n + f(n-2)x^n \quad n \geq 2.$$

Summera:

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n)x^n = \sum_{n=2}^{\infty} f(n-1)x^n + \sum_{n=2}^{\infty} f(n-2)x^n$$

$$\begin{aligned}
F(x) - 1 - x &= xF(x) - x + x^2F(x) \\
(1 - x - x^2)F(x) &= 1 \\
F(x) &= \frac{1}{1-x-x^2} \\
f(n) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}
\end{aligned}$$

Generell formel

Rekursionsekvationen

$$a(n) = c_1 a(n-1) + c_2 a(n-2) \quad n \geq 2$$

$$a(0) = a_0, \quad a(1) = a_1$$

ger

$$A(x) = \frac{a_0 + (a_1 - a_0)x}{1 - c_1 x - c_2 x^2}$$

Formel för högre ordningens rekursionsekvation finns.

Variation på summaproblemet

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \quad x_1 \geq 1.$$

$$F(x) = (x+x^2+\dots)(x+x^2+\dots) \dots (x+x^2+\dots) = x^k (1-x+x^2+\dots)^k = \frac{x^k}{(1-x)^k}$$

$$x^n\text{-koefficienten i } F(x) \text{ blir } x^{n-k}\text{-koefficienten i } \frac{x^k}{(1-x)^k} = \binom{(n-k)+k-1}{n-k} = \binom{n-1}{n-k}.$$

Alla termer 0 eller 1

$$\text{Vi får } F(x) = (1+x)(1+x) \dots (1+x) = (1+x)^k$$

x^n -koefficienten blir $\binom{k}{n}$
(naturligtvis, eller hur?)

Generellt summaproblem

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n.$$

Antag att första termen måste ha något av värdena a_1, a_2, \dots

Andra termen måste ha något av värdena b_1, b_2, \dots

o.s.v.

Då blir

$$F(x) = (x^{a_1} + x^{a_2} + \dots)(x^{b_1} + x^{b_2} + \dots) \dots$$

Exempel

Antag att första termen i

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

måste vara jämn.

$$F(x) = (1 + x^2 + x^4 + \dots) \left(\frac{1}{1-x} \right)^{k-1}$$

$$= \frac{1}{1-x^2} \left(\frac{1}{1-x} \right)^{k-1}.$$

Partition av heltal

Vi arbetar här med en lite annorlunda tolkning av summaproblemet.

Vi begränsar inte antalet termer.

Den första termen får ha värde

0, 1, 2, 3, ... Det motsvarar ett val av ett antal ettor.

Den andra termen får ha värde

0, 2, 4, ... Det motsvarar ett val av ett antal tvåor

o.s.v.

Sätt $P(x) = (1 + x + x^2 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + \dots) \dots =$
 $\frac{1}{1-x} \frac{1}{1-x^2} \frac{1}{1-x^3} \dots$
 x^n -koefficienten ger $p(n)$.

Vad är $P(x)$?

$P(x)$ är definierad som en oändlig produkt. Om $-1 \leq x \leq 1$ så går värdet av $P(x)$ att beräkna med analytiska metoder.

Värdet på varje x^n -koefficient går också att beräkna med *analytiska* metoder.

Men de går även att beräkna med *algebraiska* metoder:

Om n är fixerat fås x^n -koefficienten även som x^n -koefficienten i

$P_n(x) = (1+x+x^2+\dots+x^n)(1+x+x^2+\dots+x^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor})(1+x+x^2+\dots+x^{3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}) \dots (1+x^n)$

som går att beräkna.

Men $P(x)$ har ingen enkel sluten form!

Speciell typ av partition (1)

Bestäm antalet partitioner av n med alla delar udda.

Vi anger problemets genererande funktion $P_u(x)$.

$P_u(x) = (1 + x + x^3 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + \dots) \dots$
 $= \frac{1}{1-x} \frac{1}{1-x^3} \frac{1}{1-x^5} \frac{1}{1-x^7} \dots$

Det finns ingen känd enkel sluten form för funktionen.

Speciell typ av partition (2)

Bestäm antalet partitioner av n i *distinkta* termer.

Vi bestämmer också här en genererande funktion $P_d(x)$.

$P_d(x) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)(1 + x^4) \dots$

Inte heller här finns det en enkel sluten form.

En mystisk identitet

$p_u(n) = p_d(n)$ för alla n !

Bevis:

Vi visar att $P_u(x) = P_d(x)$.

$$1 + x = \frac{1-x^2}{1-x}$$

$$1 + x^2 = \frac{1-x^4}{1-x^2}$$

$$1 + x^3 = \frac{1-x^6}{1-x^3}$$

o.s.v.

$$\begin{aligned} P_u(x) &= \frac{1}{1-x} \frac{1}{1-x^3} \frac{1}{1-x^5} \frac{1}{1-x^7} \dots \\ &= \frac{1}{1-x} \frac{1-x^2}{1-x^2} \frac{1}{1-x^3} \frac{1-x^4}{1-x^4} \frac{1}{1-x^5} \frac{1-x^6}{1-x^6} \dots \\ &= (1+x)(1+x^2)(1+x^3) \dots = P_d(x). \end{aligned}$$

Exponentiellt genererande funktion

Om $a(0), a(1), a(2), \dots, 4$ är en talföljd så är

$A(x) = a(0) + \frac{a(1)}{1!}x + \frac{a(2)}{2!}x^2 + \dots + \frac{a(n)}{n!}x^n + \dots$ talföljdens exponentiellt genererande funktion.

Ex:

$1, 1, 1, \dots$ ger $A(x) = e^x$

$1, k, k^2, \dots$ ger $A(x) = e^{kx}$

$0!, 1!, 2!, \dots$ ger $A(x) = \frac{1}{1-x}$

Fördelar med exp gen funk

- Ger gen funk med sluten form även för mycket snabbt växande talföljder.
- Klarar vissa typer av rekursionsekvationer som inte har konstanta koefficienter.
- Hänger ihop med en metod som kallas *exponentialformeln*.

Derangements

Hur många *fixpunktsfria* permutationer av $\{1, \dots, n\}$ finns det?

Antalet kallas $d(n)$.

Ett annat sätt att uttrycka det är att $d(n)$ anger antalet sätt att dela in $\{1, \dots, n\}$ i cykler av längd ≥ 2 .

Vi försöker beräkna seriens exponentiellt genererande funktion $D(x)$.

Rekursionsformel

$$d(n) = (n-1)(d(n-1) + d(n-2)) \quad n \geq 2.$$

$$d(0) = 1 \quad d(1) = 0$$

Bevis: n kan placeras i cykel på 2 sätt.

1. I 2-cykel med ett tal i . Talet i kan väljas på $n-1$ sätt. Resten av talen kan permuteras på $d(n-2)$ sätt. Totalt $(n-1)d(n-2)$ sätt.

Det förklarar ena termen i rekursionsekvationen.

2. I en cykel av längd ≥ 3 . Välj en fixpunktsfri permutation π av $\{1, \dots, n-1\}$.

Det finns $d(n-1)$ sådana. Välj ett tal k i $\{1, \dots, n-1\}$. Kan väljas på $n-1$ sätt.

Antag att $\pi(k) = j$. Definiera en ny permutation π' så att $\pi'(k) = n$, $\pi'(n) = j$ och $\pi'(i) = \pi(i)$ annars. Denna konstruktion kan göras på $(n-1)d(n-1)$ sätt.

Det förklarar andra termen.

$$d(n) = (n-1)(d(n-1) + d(n-2))$$

Genererande funktion

$$d(n) = (n-1)(d(n-1) + d(n-2)) \quad n \geq 2$$

Multiplisera med $\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ och summera:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{d(n)}{(n-1)!} x^{n-1} =$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-2)!} (d(n-1) + d(n-2)) \right) x^{n-1}$$

$$D'(x) = xD'(x) + xD(x)$$

$$D'(x) = \frac{x}{1-x} D(x)$$

Lösningen är

$$D(x) = C \frac{e^{-x}}{1-x}$$

Eftersom $D(0) = 1$ får vi $C = 1$.

$$D(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

Tolkning

$$D(x) = \frac{e^{-x}}{1-x} =$$

$$(1 + x + x^2 + \dots) \left(1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \dots + (-1)^k \frac{x^k}{k!} + \dots \right)$$

x^n -koefficienten blir $n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$

$$\text{S\aa } d(n) = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

Det resultatet g\aa r också att komma fram till med hj\aa lp av s\aa llprincipen.