Stirlingtal

Problem: Vi vill dela in talen $\{1, \cdots, n\}$ i k st. delar. Hur många sätt kan det göras på?
Kalla antalet för $S(n, k)$. Det är ett **Stirlingtal** (av 2:a slaget).
Ex: Man kan räkna igenom alla fall och se att $S(5, 3) = 25$.

Rekursion

Vi försöker beräkna $S(5, 3)$ rekursivt. Om
$\{1, \cdots, 5\}$ skall delas in i tre delar finns det två möjligheter:
1. Talet 5 är ensamt i en del. Det finns $S(4, 2)$ sådana partitioner.
2. Talet 5 är i en del med andra tal. Gör först en partition av $\{1, \cdots 4\}$. sätt sedan 5 i någon av mängderna. Det kan göras på 3 sätt.
Totalt blir det $3S(4, 3)$ sätt.
Addering av fallen ger
$S(5, 3) = S(4, 2) + 3S(4, 3)$
På samma sätt fås $S(4, 2) = S(3, 1) + 2S(3, 2) = 1 + 2 \cdot 3 = 7$
$S(4, 3) = S(3, 2) + 3S(3, 3) = 3 + 3 \cdot 1 = 6$
$S(5, 3) = 7 + 3 \cdot 6 = 25$

Generell formel

$S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + kS(n - 1, k)$
Basfall: $S(n, 0) = 0$ $S(n, n) = 1$
$S(n - 1, k - 1)$ motsvararplacering av n ensam i en del medan $kS(n - 1, k)$ motsvarar placering av n tillsammans med andra tal.

Finns det explicit formel?

Trick: Lägg till numrering av delarna.
Antalet partitioner i numrerade delar $= k!S(n, k)$.
En sådan partition kan tolkas som en *surjektiv* funktion $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \cdots, k\}$
Hur räknar man antalet surjektiva funktioner?
Man använder metoden med *inklusion och exklusion* (såll-principen).

Inklusion och Exklusion

Antag att vi har en grundmängd X och en mängd $\{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$ av delmängder av X.
Låt I vara en indexmängd så att $I \subseteq \{1, \cdots, m\}$. Låt $A_I = \cap_{i \in I} A_i$.
Satsen om inklusion-exklusion (stark form):
Antal element i X som inte ligger i någon av A_i är
$\sum_{I \subseteq \{1, \cdots, m\}} (-1)^{|I|} \mid A_I \mid$
Satsen om inklusion-exklusion (svag form):
Låt $N_k = \sum_{|I|=k} \mid A_I \mid$ och $N = \mid X \mid$
Antalet element i X som inte ligger i någon av A_i är
$N - N_1 + N_2 - \cdots + (-1)^k N_k + \cdots + (-1)^m N_m$.

Surjektiva funktioner igen

Låt X vara mängden av alla funktioner $f : \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, k\}$ och låt A_i vara antalet funktioner som "undviker"i. (D.v.s. det finns inget j så att $f(j) = i$.)
Med betecknigarna från svaga formuleringen av inklusion-exklusion fås $N_i = (k-i)^n \binom{k}{i}$.
Antal surjektiva funktioner är
$N - N_1 + N_2 - \cdots + (-1)^k N_k + \cdots + (-1)^k N_k$
$= k^n - (k-1)^n \binom{k}{1} + (k-2)^n \binom{k}{2} + \cdots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k-1}$
$= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$.
Det ger
$S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$.

En oväntad identitet

Vi vet att $k!S(n,k) =$ antalet surjektiva funktioner $f : \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, k\}$.
Låt x vara en variabel med heltalsvärde. Det finns x^n funktioner $f : \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, x\}$ *Bildmängden* till en funktion f är $\{j$ så att $j = f(i)$ för något $i\}$
f är alltid surjektiv på sin bildmängd.
Det finns $\binom{x}{k}$ st. k-delmängder. Var och en av dem kan vara en bildmängd. Det finns $k!S(n,k)$ surjektiva funktioner till varje sådan mängd.
$x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k} k!S(n,k)$
$= \sum_{k=0}^{n} x(x-1)\cdots(x-k+1)S(n,k)$
$= \sum_{k=0}^{n} S(n,k)[x]_k$.

Totala antalet partitioner

På hur många sätt kan mängden $[1, \cdots, n\}$ partitioneras?
Kalla talet för B_n. Det är ett s.k. **Bell-tal**.
$B_n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)$

Rekursion

$B_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}$
Bevis: I varje partition ingår n i någon delmängd A. Antag att A har storlek k. Sätt $A' = A - \{n\}$. A' är en demängd av $\{1, \cdots n-1\}$ och kan väljas på $\binom{n-1}{k-1}$ sätt. Mängden $\{1, \cdots n\} - A$ kan partitioneras på B_{n-k} sätt. Det ger
$B_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}$

Andra typer av partitioner

Vi har sett att
Antal partitioner av särskiljbara objekt i icke särskiljbara delar $= S(n,k)$
Antal partitioner av särskiljbara objekt i särskiljbara delar $= k!S(n,k)$
Då borde vi också kunna beräkna
Antal partitioner av icke särskiljbara objekt i särskiljbara delar.
Antal partitioner av icke särskiljbara objekt i icke särskiljbara delar.

Ordnade partitioner av heltal

Partitioner av icke särskiljbara objekt i särskiljbara delar kan tolkas som partitioner av heltal:
n st ettor skall delas upp i k numrerade delar.
Ex: Partitionera 5 i 3 delar. Motsvarar uppdelning i summa av tre ordnade termer:
$1+1+3,\ 1+3+1,\ 3+1+1,\ 2+2+1,\ 2+1+2, 1+2+2$
Givet n och k, finns det en formel för antalet sätt?

Lösning

Antalet sätt är $\binom{n-1}{k-1}$.
Bevis: Låt x_i vara antalet ettor i term i.
$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n \;\; x_i \geq 1$
Sätt nu $x_i' = x_i - 1$.
$x_1' + x_2' + \cdots + x_k' = n - k \;\; x_i \geq 0$
Valet av variabelvärden motsvarar dragning med återläggning av $n-k$ kulor ur mängd med k kulor.
Antalet är $\binom{k-(n-k)-1}{n-k} = \binom{n-1}{n-k} = \binom{n-1}{k-1}$.

Totala antalet ordnade partitioner

$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = 2^{n-1}$
Ex: Antalet sätt att partitionera 4 är
$4,\ 1+3,\ 3+1,\ 2+2,\ 1+1+2,\ 1+2+1,\ 2+1+1,\ 1+1+1+1$

Oordnade partitioner av heltal

Motsvarar partition av icke särskiljbara delar i icke särskliljbara delar.
Ex: Partitioner av 5:
$5,\ 4+1,\ 3+1+1,\ 2+2+1,\ 2+1+1+1,\ 1+1+1+1+1$
Det är den svåraste typen av partitioner.
Låt $p_k(n)$ vara antalet partitioner i k termer (delar).
Rekursion: $p_k(n) = \sum_{s=1}^{k} p_s(n-k)$.
Bevis: $p_k(n)$ anger antalet lösningar till
$x_1 + x_2 + \cdots ? x_k = n$ där $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_k \geq 1$
Drag bort 1 från varje x_i.
$x_1' + x_2' + \cdots + x_k' = n - k$.
Nu gäller $x_i \geq 0$. Låt s vara antalet variabler som är större än noll.
Då är $x_1' + x_2' + \cdots x_s' = n - k$.
Antalet sådan lösningar är $p_s(n-k)$.

Totala antalet oordnade partitioner

Det totala antalet oordnade partitioner anges med $p(n)$. Det enklaste sättet att hitta talet är med hjälp av genererande funktioner. (Mer om det nästa föreläsning.)
Sätt $f(x) = \frac{1}{1-x} \frac{1}{1-x^2} \cdots \frac{1}{1-x^n}$
Gör en serieutvecklig av funktionen.
Då är $p(n)$ koefficienten framför x^n.

Stirlingtal av 1:a slaget

Hur många permutationer av n objekt med exakt k cykler finns det?
Kalla talet för $c(n, k)$.
Stirlingtal av 1:a slaget är definierade som
$s(n, k) = (-1)^k c(n, k)$
De har ingen direkt kombinatorisk tolkning. De dyker dock upp i många sammanhang.

En formel med Stirlingtal av 1:a slaget

Kom ihåg att $x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n, k)[x]_k$.
Det går att visa att $[x]_n = \sum_{k=0}^{n} s(n, k)x^k$.
Dessutom går det att visa att
$[x]^n = \sum_{k=0}^{n} c(n, k)x^k$.

Sylows sats

Om G är en grupp med n element och p är ett primtal som delar n och p^r är den högsta potens som delar n så finns det en delgrupp av G av storlek p^r.
För att bevisa detta använder vi följande specialfall av Lucas sats:
Om $n = mp^r$ och m inte är delbart med p så är $\binom{n}{p^r}$ inte delbart med p.
Bevis: Enligt Lucas sats är $\binom{n}{p^r} \equiv \binom{m}{1} \,(mod\, p)$.
Eftersom $\binom{m}{1} = m$ och m inte är delbart med p är inte $\binom{n}{p^r}$ delbart med p.

Lite gruppteori

Låt oss anta att vi har kombinatoriska objekt $O_1, O_2, \cdots, O_m$.
Vi har en grupp G som *verkar* på objekten på så sätt att för varje $g \in G$ gäller det att $g(O_i) = O_j$ d.v.s. varje gruppelement transformerar objekten till nya objekt.
T.ex. kan objekten vara numrerade träd och G vara omnumreringar av noderna.
Det kan hända att $g(O_i) = O_i$ d.v.s. att g håller O_i fixt.
Om O är ett objekt är G_O mängden av alla gruppelement som håller O fixt.
Det visar sig att G_O är en delgrupp.
Om det finns g så att $g(O_i) = O_j$ säger vi att O_i och O_j ligger i samma ekvivalensklass. Vi kallar ekvivalensklassen för ett objekt O för B_O
Det går att visa att $\mid G_O \mid\mid B_O \mid = \mid G \mid$.

Bevis för Sylows sats

Det finns $\binom{mp^r}{p^r}$ delmängder av G av storlek p^r. Vi kan låta G verka på dessa mängder på följande sätt:
Om $M = \{m_1, \cdots, m_{p^r}\}$ så är
$g(M) = \{gm_1, \cdots gm_{p^r}\}$.
Eftersom mängderna kommer att delas in i ekvivalensklasser och antalet mängder inte är delbart med p så finns det en ekvivalensklass vars storlek inte delar p. Låt M vara en mängd i ekvivalensklassen. (Ekvivalensklassen är då B_M.)
Låt G_M vara delgruppen som håller M fix. Eftersom $\mid G_M \mid\mid B_M \mid = mp^r$ så måste $\mid G_M \mid$ vara delbart med p^r.
Om $m \in M$ så är $g_1 m \neq g_2 m$ för alla $g_1, g_2 \in G_M$. Eftersom $gm \in M$ för alla $g \in G_M$ (eftersom $g(M) = M$ för alla $g \in G_M$) så måste $\mid G_M \mid \leq \mid M \mid$.
Nu vet vi att det både gäller $p^r \leq \mid G_M \mid$ och $p^r \geq \mid G_M \mid$. Det betyder att $\mid G_M \mid = p^r$ och G_M är den delgrupp vi söker.