

Antal 4-grafer

Vi skall försöka avgöra hur många olika grafer med 4 noder det finns. Det finns 24 sätt att permutera om hörnen på. Men vi är inte intresserade av permutation av hörne utan permutationer av **kanterna**. Låt oss anta att vi har numrerat kanterna enligt följande: (1,2)-1, (1,4)-2, (3,4)-3, (2,3)-4, (2,4)-5, (1,3)-6. (T.ex.) Låt nu $g = (1\ 2\ 3)(4)$ vara en permutation definierad på hörnen. Den permutationen har då formen (1 4 6)(2 5 3) när man ser på verkan på kanterna.

Genom att gå igenom de 24 permutationerna får vi fram cykelindex

$$Z_G = \frac{1}{24}(X_1^6 + 9X_1^2X_2^2 + 6X_2X_4 + 8X_3^2).$$

Antalet grafer är nu lika med antalet ekvivalenta 2-färgingar av kanterna.

$$\text{Det är } \frac{1}{24}(2^6 + 9 \cdot 2^4 + 6 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2^2) = 11$$

Antal 5-grafer

På samma sätt får man att symmetrigruppen för 5-grafer är

$$Z_G = \frac{1}{120}(X_1^{10} + 10X_1^4X_2^3 + 15X_1^2X_2^4 + 20X_1X_3^3 + 20X_1X_3X_6 + 30X_2X_4^2 + 24X_5^2)$$

Antalet grafer blir 34.

Skärpning av problemet

4-halsband igen. Antag att vi vill hitta all 2-färgningar med 2 vita och 2 svarta kulor. Vi har

$$Z_G = \frac{1}{4}(X_1^4 + 2X_4 + X_2^2).$$

Bilda uttrycket

$$\frac{1}{4}((b+w)^4 + 2(b^4+w^4) + (b^2+w^2)^2)$$

Utveckla:

$$\frac{1}{4}(b^4 + 4b^3w + 6b^2w^2 + 4bw^3 + w^4 + 2b^4 + w^2 + b^4 + 2b^2w^2 + w^4) = b^4 + b^3w + 2b^2w^2 + bw^3 + w^4.$$

Termen framför b^2w^2 ger svaret.

Samma metod kan användas för att ta reda på antalet grafer med n noder och k kanter.

Polyas sats (avancerade formen)

Antag att vi har en grundmängd X och cykelindex Z_G som tidigare. Antag att vi är intresserade av k -färgningar där färg nr i skall förekomma f_i antal gånger. Då fås svaret som $b_1^{f_1} \dots b_i^{f_i} \dots b_k^{f_k}$ -koefficienten i $Z_G((b_1 + \dots + b_k), (b_1^2 + \dots + b_k^2), \dots, (b_1^n + \dots + b_k^n))$.

Övrigt

Detta är slutet på det huvudsakliga kursinnehållet. I mån av tid kommer jag att ta upp några problem inom s.k. oändlig kombinatorik (kap 19).