

## Planära grafer

En graf är planär om den kan ritas i planet utan korsande kanter. Ex: Graferna  $K_5$  och  $K_{3,3}$  är inte planära. (Vi kommer att bevisa det senare.)

Problem: Hur visar man att en graf inte är planär?

### Eulers sats

Vi har en graf  $G$  som är planär och sammanhängande. Vi kräver att  $G$  inte har loopar eller parallella kanter. Vi antar att  $G$  har  $v$  noder och  $e$  kanter.  $G$  avgränsar  $f$  stycken regioner i planet (varav en är oändlig).

Eulers sats: Om ovanstående gäller så gäller också  $v - e + f = 2$ .

### Bevis

Vi använder induktion över antalet kanter. Om  $G$  är ett träd så är  $e = v - 1$  och  $f = 1$ . Då gäller  $v - e + f = 2$ . Om  $G$  inte är ett träd så går det att hitta en kant  $e$  så att  $G - e$  är sammanhängande. Om  $v', e'$  och  $f'$  är parametrarna för  $G - e$  gäller  $v' = v$ ,  $e' = e - 1$ ,  $f' = f - 1$ . Enligt induktionsantagandet är  $v' - e' + f' = 2$ . Men då är också  $v - e + f = 2$ .

### Krav på planära grafer

Antag att varje sida gränsar till minst tre kanter. Då gäller  $2e \geq 3f$ . Multiplicera Eulers samband med 3. Det ger:  $3v - 3e + 3f = 6$  Sätt in olikheten:  $3v - e \geq 6$   $e \leq 3v - 6$ . I en planär graf måste alltså  $e \leq 3v - 6$ . Tillämpning:  $K_5$  har  $v = 5$  och  $e = 10$ . Det ger  $e > 3v - 6$ .  $K_5$  kan därför inte vara planär.

### En skärpning

Om vi tar  $K_{3,3}$  har vi  $v = 6$  och  $e = 9$ . Då är  $e \leq 3v - 6$  så vi kan inte på det sättet avgöra att  $K_{3,3}$  inte är planär. Men: Om varje region gränsar till minst 4 kanter så är  $2e \geq 4f$ ,  $e \geq 2f$ . Multiplicera Eulers samband med 2:  $2v - 2e + 2f = 4$  Sätt in olikheten:  $e \leq 2v - 4$ . Eftersom cykler i  $K_{3,3}$  har längd minst 4 så uppfyller  $K_{3,3}$  kravet. Men värdena på  $v, e$  för  $K_{3,3}$  ger  $e > 2v - 4$ . Så  $K_{3,3}$  kan inte vara planär.

### Ytterligare ett samband

Påstående: I en planär graf finns minst en nod med grad  $\leq 5$ . Bevis: Antag att alla noder har grad  $\geq 6$ . Då måste  $2e \geq 6v$ ,  $e \geq 3v$ . Men samtidigt har vi  $e \leq 3v - 6$ . Det ger  $e \leq e - 6$  d.v.s.  $0 \leq -6$ . Men det är omöjligt. Alltså finns minst en nod med grad  $\leq 5$ .

### Färgning av planära grafer

Fyrfärgssatsen: Varje planär graf kan färgas med 4 färger. Beviset är mycket svårt. Men om vi tar ett större tal än 4 går det lättare. Vi börjar med 6.

### 6-färgssatsen

Varje planär graf kan färgas med 6 färger. Bevis: Använd induktion. Antag att satsen är sann för grafer med upp till  $n - 1$  noder. Antag att  $G$  har  $n$  noder. Någon av dem, t.ex.  $x$ , har grad  $\leq 5$ . Färga  $G - x$  med 6 färger. Runt  $x$  är högst 5 färger användna. Alltså finns en färg ledig för  $x$  och vi kan därför 6-färga  $G$ .

## 5-färgssatsen

Varje planär graf kan färgas med 5 färger.

Bevis: Detta är krångligare men bygger på samma idé. Vi använder induktion och hittar en nod  $x$  med grad  $\leq 5$ .

Vi färgar  $G - x$  med 5 färger. Om det finns en ledig färg runt  $x$  kan vi färga  $G$  med 5 färger. Vi antar nu att  $x$  har 5 grannar som alla färgats med olika färger. Vi skall visa att någon av noderna kan färgas om så att vi kan frigöra en färg att färga  $x$  med.

Antag att noderna runt  $x$  är  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$  i medsols ordning och att  $v_i$  har färgats med färg  $i$ . Starta i  $v_1$  och konstruera en stig  $s_{13}$  som omväxlande har en nod med färg 1 och färg 3. Försök att få stigen att nå  $v_3$ . Det finns 2 fall:

1. Det går inte att nå  $v_3$ . Då tar stigen  $s_{13}$  slut någonstans. Då kan vi byta färger 1 och 3 längs  $s_{13}$  och fortfarande ha en korrekt färgning. Då får  $v_1$  färgen 3 och färgen 1 blir ledig för  $x$ .

2. Det går att nå  $v_3$ . Skapa nu en liknande stig  $S_{24}$  som startar i  $v_2$ . Den stigen kan inte nå  $v_4$  eftersom  $S_{13}$  separerar  $v_2$  och  $v_4$ . Då kan vi färga om längs  $S_{24}$  så att  $v_2$  får färg 4 och färg 2 frigörs därför för  $x$ .

I vilket fall kan vi 5-färga  $G$ .

## Kuratowskis sats

Vi vet att  $K_5$  och  $K_{3,3}$  inte är planära. De är de fundamentala icke-planära graferna i den meningen att alla icke-planära grafer har  $K_5$  eller  $K_{3,3}$  som en "del". Detta är innehållet i Kuratowskis sats. Det besvärliga är att precisera vad man menar med "del". Det finns två sätt att tolka det på.

## Minorer

Vi säger att  $A$  är en **minor** till  $G$  om vi kan få  $A$  genom att först välja ut en delgraf  $A'$

och sedan

göra en följd av kontraktioner  $/e$  med kanter i  $A'$  tills vi får  $A$ .

Om vi ersätter kontraktionerna med en annan operation där vi tar bort noder med grad 2 och länkar ihop de två kanter som går till noden till en kant så får vi en s.k. **topologisk minor**.

Obs: Om  $A$  är en topologisk minor är den också en vanlig minor.

## Kuratowskis sats (igen)

Det finns två varianter av satsen:

En graf  $G$  är planär om och endast om den inte har  $K_5$  eller  $K_{3,3}$  som minor.

En graf  $G$  är planär om och endast om den inte har  $K_5$  eller  $K_{3,3}$  som topologisk minor.

Man kan säga att den 1:a varianten är enklast att använda om man vill visa att  $G$  inte är planär men att den andra är enklast om man vill visa att  $G$  är planär.

## Beviset är svårt

Beviset för Kuratowskis sats är komplicerat. Det går till ungefär så här: Man anger en algoritm  $A$  som givet  $G$  försöker rita upp  $G$  i planet. Man visar sedan att de enda fall där algoritmen kör fast är när  $K_5$  eller  $K_{3,3}$  är minorer. Man

visar sedan att om  $K_5$  eller  $K_{3,3}$  finns som minor så finns någon av dem som topologisk minor.

I mån av tid kommer en skiss av beviset att ges på föreläsningen.

### Grafer på andra ytor

Varje graf som kan ritas i planet kan också ritas på ytan av en sfär.

Fråga: Vad händer om vi försöker färga en graf som är ritad på en annan yta än en sfär?

Det visar sig att det går att säga förvånansvärt mycket om det problemet.

### Grafer på en torus

En torus är helt enkelt en "badring" (eller en "munk").

Om man ritas en graf planärt på en torus får man tal  $v, e, f$  precis som i det plana fallet. (Men kanterna måste ritas böjda.)

Det går att visa att om en graf ritas på en torus på ett sådant sätt att alla regioner kan plattas ut och läggas i planet så måste  $v - e + f = 0$ . Det går nu att visa på liknande sätt som i planet att det finns en nod med grad högst 6.

### 7-färgningsatsen för en torus

Varje graf som är planär på en torus kan färgas med 7 färger.

Bevis: Använd induktion. Gör på samma sätt som i plana fallet. Skillnaden är att vi har en nod med grad  $\leq 6$ . 7-färga resten av grafen. Det finns då en färg ledig för vår nod.

### 7 färger krävs

Man kan rita in  $K_7$  på ytan av en torus. Det visar att man inte kan klara sig med färre färger än 7.

### Mer komplicerade ytor

Låt  $S$  vara en yta med  $g$  st. "hål". Det brukar kallas att  $S$  är en orienterbar yta med genus  $g$ . Eulers sats gäller då på formen  $v - e + f = 2 - 2g$ . (En sfär har  $g = 0$  och en torus  $g = 1$ .) Om  $g \geq 1$  är det kromatiska talet för en graf som kan ritas planärt på ytan  $\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2} \rfloor$ .

På något sätt är faktisk färgning av grafer i planet det fall som är svårast att analysera.