

## Graffärgning

Vi har en graf  $G$ . En färgning är en tilldelning av tal (färger)  $c(x)$  till varje nod  $x$  så att om  $(x, y)$  är en kant så är  $c(x) \neq c(y)$ . Det gäller att minimera antalet färger. Definition: Det **kromatiska talet**  $\chi(G)$  är det minimala antalet färger som krävs för att färga  $G$ .

## Fyrfärgssatsen

Om  $G$  är planär (d.v.s. kan ritas i planet utan korsande kanter) är  $\chi(G) \leq 4$ . Beviset från 1976 är ytterst komplicerade. Det bygger på undersökning av ett stort antal specialfall med hjälp av dator.

## En enkel uppskattning

Om  $\Delta$  är största graden på noderna i  $G$  så är  $\chi(G) \leq \Delta + 1$ . Bevis: Lägg på en numrering på noderna. Färga noderna i ordning  $1, 2, \dots$  och använd första färg som inte är upptagen av någon granne. Högst  $\Delta$  färger kan vara upptagna så  $\Delta + 1$  färger räcker alltid till.

## Kan det hända att $\chi(G) = \Delta + 1$ ?

Om  $G = K_n$  så är  $\Delta = n - 1$  och  $\chi(G) = n$ . Om  $G$  är en cykel av udda längd är  $\Delta = 2$  och  $\chi(G) = 3$ . Detta är de enda undantagen. Brooks sats: Låt  $G$  vara en sammanhängande graf som inte är komplett och som inte är en udda cykel. Då är  $\chi(G) \leq \Delta$ .

## Bevis

Vi gör först ett antagande. Vi antar att vi kan hitta 3 noder  $v_1, v_2, v_n$  ( $n = |V(G)|$ ) så att  $(v_1, v_n) \in E(G)$ ,  $(v_2, v_n) \in E(G)$  men  $(v_1, v_2) \notin E(G)$  och som är sådana att  $G - \{v_1, v_2\}$  är sammanhängande. Om sådana  $v_1, v_2, v_n$  finns går grafen att färga med  $\Delta$  färger. Det visas i flera steg: Först väljer vi  $v_{n-1}$  som granne till  $v_n$ . Välj  $v_{n-2}$  som granne till minst en av  $v_{n-1}, v_n$ . På samma sätt väljs  $v_i$  så att den är granne till minst en av  $v_{i+1}, \dots, v_n$ . Fortsätt tills vi valt  $v_3$ . Går det att välja på detta sätt? Ja, eftersom  $G - \{v_1, v_2\}$  är sammanhängande. Färga nu  $v_1$  och  $v_2$  med samma färg. Färga sedan  $v_3, \dots, v_{n-1}$  med första lediga färg. Eftersom graden är  $\leq \Delta$  och varje  $v_i$  har minst en ofärgad granne (en av noderna  $v_{i+1}, \dots, v_{n-1}$ ) krävs högst  $\Delta$  färger. När  $v_n$  skall färgas är högst  $\Delta - 1$  färger använda eftersom  $v_1$  och  $v_2$  har samma färg.

## Går det att välja noder $v_1, v_2, v_n$ ?

Det går inte om  $G$  är komplett. Men det har vi tagit hänsyn till. Men det kan hända att vi får en osammanhängande graf om vi tar bort  $v_1, v_2$ . Vi analyserar det fallet.

## Analys

Antag att  $\Delta \geq 3$ . ( $\Delta = 2$  ger en jämn eller udda cykel.) Antag först att det finns en nod  $n$  så att  $G - n$  är sammanhängande. Då består  $G - n$  av komponenter  $K_1, K_2, \dots, K_r$ . Det går att visa med induktion att  $K_1 \cup \{n\}, K_2 \cup \{n\}, \dots, K_r \cup \{n\}$  kan färgas med  $\Delta$  färger. Genom lämplig omfärgning så att  $n$  får samma färg

i alla  $K_i \cup \{n\}$  kan vi sätta ihop delarna och färga  $G$  med  $\Delta$  färger. Antag nu att vi inte kan göra  $G$  osammanhängande genom att ta bort en nod men att  $G - \{u, v\}$  är osammanhängande. Antag att  $K_1$  och  $K_2$  är två komponenter i  $G - \{u, v\}$ .

Försök: Vi färgar  $K_1 \cup \{u, v\}$  och  $K_2 \cup \{u, v\}$  med  $\Delta$  färger var. Vi sätter sedan ihop delarna till en färgning av  $G$ .

Fungerar detta? Det enda problemet som kan uppstå är att  $K_1 \cup \{u, v\}$  och  $K_2 \cup \{u, v\}$  båda kräver  $\Delta$  färger och att (t.ex.) färgning av  $K_1 \cup \{u, v\}$  ger  $u, v$  samma färg medan färgning av  $K_2 \cup \{u, v\}$  ger  $u, v$  olika färger. Låt  $g_1(u)$  vara  $u$ 's grad i  $K_1 \cup \{u, v\}$  o.s.v. Då måste  $g_1(u) = \Delta - 1$ ,  $g_1(v) = \Delta - 1$ ,  $g_2(u) = \Delta - 1$ ,  $g_2(v) = \Delta - 1$ . Men samtidigt måste  $g_1(u) \leq \Delta$ . Det ger  $\Delta - 1 + \Delta - 1 \leq \Delta$ . Det betyder att  $\Delta \leq 2$ . Men vi har ju antagit att  $\Delta \geq 3$ .

### Kromatiska polynom

Problem: Givet en graf  $G$  kan vi ställa följande fråga: Om vi har  $t$  st färger, på hur många sätt kan vi färga  $G$ ? Kalla antalet sätt för  $P_G(t)$ . Detta uttryck kallas det **kromatiska polynomet**. Relevans för kromatiska talet:  $\chi(G) = \min_t P_G(t)$  där  $t$  är heltal.

### Exempel

$G = K_n$ . Första noden kan färgas på  $t$  sätt, andra på  $t - 1$  sätt o.s.v. Det ger  $P_G(t) = t(t - 1)(t - 2) \cdots (t - n + 1)$ .

$G$  är en stig med  $n$  noder. Första noden kan färgas på  $t$  sätt, andra på  $t - 1$  sätt, tredje på  $t - 1$  sätt o.s.v. Det ger  $P_G(t) = t(t - 1)^{n-1}$ .

$G$  består av  $n$  st isolerade noder.  $P_G(t) = t^n$ .

$G$  består av  $k$  kanter utan gemensamma noder.  $P_G(t) = (t(t - 1))^k$ .

Intressant fråga: Går det att återskapa  $G$  ur det kromatiska polynomet?

### Krångligare exempel

$G$  är en cykel med 4 noder. Försök: Färga första noden. Det finns  $t$  möjliga färger. Färga andra och tredje noden. Det finns  $t - 1$  färger till dem. Men vad händer när vi skall färga den fjärde noden? Det verkar inte gå att avgöra på ett enkelt sätt.

Den naiva tekniken att färga nod för nod fungerar oftast inte.

### En rekursiv metod

Låt  $G$  vara en graf och  $e = (x, y)$  en kant i  $G$ . Låt  $G - e$  vara grafen som fås om vi tar bort  $e$ . Låt  $G/e$  vara grafen som fås om vi ersätter  $x, y$  med en nod  $z$ , tar bort  $(x, y)$  och sätter in kanter  $(v, z)$  om  $(v, x) \in E(G)$  eller  $(v, y) \in E(G)$ . Då gäller  $P_{G-e}(t) = P_{G/e}(t)$ .

### Bevis

Vi visar att  $P_{G-e}(t) = P_G(t) + P_{G/e}(t)$ . Antag att  $G - e$  skall färgas med  $t$  färger. Då finns 2 typer av färgningar: 1. De där  $x, y$  får olika färger. Det är samma sak som en färgning av  $G$ . Det finns  $P_G(t)$  sådana. 2. De där  $x, y$  får samma färg. Det är samma sak som en färgning av  $G/e$ . Det finns  $P_{G/e}(t)$  sådana färgningar. Detta ger  $P_{G-e}(t) = P_G(t) + P_{G/e}(t)$  och därmed  $P_G(t) = P_{G-e}(t) - P_{G/e}(t)$ .

## Algoritm

Operationerna  $G-e$  och  $G/e$  minskar antalet kanter i grafen. Genom att använda operationerna upprepade gånger får vi till slut en kombination av kromatiska polynom för grafer utan kanter. Sådana grafer  $H$  har  $P_H(t) = t^k$  där  $k$  är antalet noder. Så  $P_G(t)$  går alltså att beräkna. Dessutom ser man av resonemanget att  $P_G(t)$  verkligen blir ett polynom vilket inte är självklart från början.

## Exempel

Låt  $G$  vara en cykel med 4 kanter. Låt  $e$  vara en av kanterna.  $G-e$  blir då en stig med 4 noder.  $P_{G-e}(t) = t(t-1)^3$ .  $G/e$  blir en triangel.  $P_{G/e}(t) = t(t-1)(t-2)$ . Vi får  $P_G(t) = t(t-1)^3 - t(t-1)(t-2) = t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 3t$ .

## Några egenskaper hos kromatiska polynom

Konstanta termen i  $P_G(t)$  är 0. Bevis: Konstanta termen =  $P_G(0)$  som måste vara 0.

Högstgradstermen i  $P_G(t)$  är  $t^n$  där  $n$  är antalet noder. Bevis: Använd induktion över antalet kanter. Påståendet är sant för grafer med 0 kanter. Antag att  $g$  har  $n$  noder.  $P_G(t) = P_{G-e}(t) - P_{G/e}(t)$ . Enligt induktionsantagandet är påståendet sant för  $G-e$  och  $G/e$ .  $G-e$  har  $n$  noder,  $G/e$  har  $n-1$  noder. Det ger att högsta termen i  $P_G(t)$  är  $t^n$ .

Nästa högsta termen är  $-mt^{n-1}$  där  $m$  är antalet kanter i  $G$ .

Bevis: Gör induktion över antalet kanter. Både  $G-e$  och  $G/e$  innehåller en kant mindre än  $G$ .  $P_G(t) = P_{G-e}(t) - P_{G/e}(t) = (t^n - (m-1)t^{n-1} + \dots) - (t^{n-1} - \dots) = t^n - mt^{n-1} + \dots$

## Mer information

Det går att visa på liknande sätt att  $P_G(t) = t^n - mt^{n-1} + \dots + (-1)^{n-i} a_i t^i + \dots + (-1)^{n-k} a_k t^k$  där alla  $a_i > 0$  för  $k \leq i \leq n$  och  $k$  är antalet komponenter i grafen. (Speciellt kan vi se att polynomet är alternerande.)

## Karaktärisering av träd

$G$  är ett träd om och endast om  $P_G(t) = t(t-1)^{n-1}$ . Bevis: Antag att  $P_G(t) = t(t-1)^{n-1} = t^n - (n-1)t^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1}t$ . Vi ser av detta att  $G$  har  $n$  noder,  $n-1$  kanter och är sammanhängande. (Sista termen har grad  $k=1$ .)  $G$  måste då vara ett träd.

## Kantfärgning

Givet en graf  $G$  kan vi istället färga kanterna. Kravet är då att två kanter med en gemensam nod måste ha olika färger.

Definition:  $\chi'(G)$  är det minsta antalet färger färger som krävs för kantfärgning av  $G$ . Det kallas för det **kantkromatiska talet**.

## Vizings sats

Det går att se att  $\chi'(G) \geq \Delta$ . Överraskande nog gäller  $\chi'(G) \leq \Delta + 1$ . Detta är Vizings sats. Det finns alltså 2 typer av grafer:

De med  $\chi'(G) = \Delta$  och de med  $\chi'(G) = \Delta + 1$ . Att avgöra vilken typ en viss graf är är ett NP-komplett problem.

### Specialfall

Om  $G = K_n$  så är  $\chi'(G) = \Delta + 1$  om  $n$  är udda  
 $\chi'(G) = \Delta$  om  $n$  är jämnt.

Bevis: Om  $G = K_n$  är  $\Delta = n - 1$ . Jämför med föreläsning 9. En uppdelning av kanterna i färgklasser är samma sak som en uppdelning av noderna i en **turnering**. Om  $n$  är udda måste en turnering ha  $n$  omgångar. Om  $n$  är jämnt kan vi ordna en turnering med  $n - 1$  omgångar.

### Ett fall till

Om  $G$  är en bipartit graf är  $\chi'(G) = \Delta$ .

Bevis: Vi gör induktion över antalet kanter. Om inga kanter finns är  $\chi'(G) = \Delta = 0$ . Välj en kant  $(x, y)$  och tag bort den. Den återstående grafen kan färgas med  $\Delta$  färger (enligt induktionen). Det finns minst en färg ledig runt  $x$  och en ledig runt  $y$ . Om det är samma färg kan vi använda den. Om det inte är samma färg tänker vi så här:

Antag att röd är ledig runt  $x$  men inte blå och att blå är ledig runt  $y$  men inte röd. Bygg en stig  $S$  som startar i  $x$  och går omväxlande över blå och röda kanter ända tills vi inte kommer vidare. Byt plats på färgerna röd och blå längs stigen. Det frigör färgen blå runt  $x$  och vi kan nu färga kanten  $(x, y)$  blå. Därmed har vi färgat den ursprungliga grafen med  $\Delta$  färger.