Ett problem

6 personer träffas på en fest. Bland dessa finns det
en grupp om 3 personer där alla känner varandra
eller
en grupp om 3 personer där ingen känner någon annan.
Visa detta.

Bevis

Kalla personerna a,b,c,d,e,f. Fixera a. Ta reda på hur många som känner a. Det finns 2 fall.
1. a känner minst 3 andra. Säg att det är b,c,d. Om t.ex. b,c känner varandra bildar (a,b,c) en känner-grupp. Om ingen av b,c,d känner varandra bildar (b,c,d) en inte-känner-grupp.
2. Det finns minst 3 personer som a inte känner. Säg att det är b,c,d. Om t.ex. b,c inte känner varandra bildar (a,b,c) en inte-känner-grupp. Om b,c,d alla känner varandra bildar (b,c,d) en känner-grupp.
Saken är klar.

Några frågor

Gäller resultatet om vi har 5 personer? Nej! Vad händer om man släpper på kravet om 3 personer? Då får vi ett trivialt påstående.
Ex på liknande påståenden: Av tre personer finns det 2 som har samma kön.
Icke-trivialt: I en grupp om 9 personer finns det en grupp om 4 personer som alla känner varandra eller en grupp om 3 personer där ingen känner någon annan.

Mer abstrakt formulering

Antag att vi har den kompletta grafen K_6 och färgar alla kanter **röda** eller **blå**. Hur än färgningen görs så finns det en röd triangel eller en blå triangel.

Ramseys sats (enkel variant)

Det finns ett minsta tal $R(k, l)$ så att om kanterna i $K_{R(k,l)}$ färgas röda och blå så finns det en k-klick med enbart röda kanter eller en l-klick med enbart blå kanter.

Liknande satser

Det finns en stor klass av liknande satser som alla går ut på ungefär följande:
I en mycket stor struktur måste det finnas ordnade delstrukturer av en viss storlek.
(Det går inte att undvika en "viss ordning".)

Bevis för Ramseys sats

Vi använder induktion. Vi ser först att $R(k, 2) = k$ och $R(2, l) = l$ om $k, l \geq 2$. Antag att vi vill visa att $R(k, l)$ existerar och att vi har visat att $R(k-1, l)$ och $R(k, l-1)$ existerar. Vi visar att om $n = R(k-1, l) + R(k, l-1)$ så finns det en rödfärgad k-klick eller en blåfärgad l-klick i K_n. Det betyder att $R(k, l)$ existerar och att $R(k, l) \leq n$.

Fixera noden n i K_n och gör en färgning. Vi generar en *inducerad* färgning på noderna $1, 2, \cdots n-1$: Om $c(i, n)$ är färgen på (i, n) ger vi i samma färg. (Kalla den $c(i)$.) Det går att se att det finns $R(k-1, l)$ noder som är röda eller $R(k, l-1)$ noder som är blå.
Det första fallet analyseras: Om det finns $R(k-1, l)$ röda noder så finns det en K_{k-1}-delgraf med röda kanter eller en K_l-delgraf med blå kanter. I första fallet bildar noderna i K_{k-1} tillsammans med n en K_k-delgraf med röda kanter. I det andra fallet finns som sagt en K_l-delgraf med blå kanter.
Det andra fallet behandlas på liknande sätt.
Beviset är klart.

Exakta värden?

Beviset visar att $R(k, l)$ existerar. Det säger inte hur stort talet är. Beviset ger dock uppskattningen $R(k, l) \leq R(k-1, l) + R(k, l-1)$.
Exakta värden är ytterst svåra att beräkna!

En tillämpning

Färgning kan låta artificiellt. Det handlar snarare om att ett par har en viss egenskap (röd) eller inte har egenskapen (blå).
Påstående: Om n är ett heltal så finns det ett tal N så att varje sekvens av N olika tal $x_1, x_2, \cdots x_N$ har en växande delsekvens av längd n eller en avtagande delsekvens av längd n.
Bevis: Tänk på en K_N med talen $1, \cdots n$ som noder. Om $i < j$ färgar vi kanten (i, j) röd om $x_i < x_j$ och blå om $x_j > x_i$. Om $N = R(n, n)$ så finns en röd n-klick (växande sekvens) eller en blå n-klick (avtagande sekvens).

En exakt lösning av problemet

Det går att visa att $N = (n-1)^2 + 1 = n^2 - 2n + 1$ är det minsta N-värde som fungerar. Ex: $n = 2$ ger $N = 2$ (naturligtvis). $n = 11$ ger $N = 101$.
Bevis: Tag sekvens med $(n-1)^2 + 1$ tal $x_1, x_2, \ldots$. Låt $v(i)$ vara längden på längsta växande sekvens som startar med x_i. Låt $a(i)$ vara längden på den längsta avtagande sekvens som startar i x_i. Vi antar att $v(i), a(i) \leq n-1$ för alla i (och visar att det är omöjligt). Låt M_{st} vara mängden av alla i så att $v(i) = s$ och $a(i) = t$. Vi låter $1 \leq s, t \leq n-1$. Klasserna M_{st} ger en partition av $(n-1)^2 + 1$ tal i $(n-1)^2$ delmängder. Minst en delmängd måste innehålla 2 element. Men det är omöjligt! (Varför?)

Generalisering

Vad händer om vi har 3 färger?
Ex: N personer är på fest. Finns det en 3-grupp så att alla tycker om varandra eller alla hatar varandra eller inga känner varandra? Det kan modelleras med att varje par får en av tre färger och vi letar efter en enfärgad 3-grupp.
Låt $R(k, l, m)$ betyda minsta talet så att om kanterna i $K_{R(k,l,m)}$ färgas röda, blå eller gröna så finns det en röd K_k eller en blå K_l eller en grön K_m. Finns talet $R(k, l, m)$?
Lösning: Definierar 2 färger röd och **blön**. Sätt $n = R(k, R(l, m))$. Då finns det en blå K_k eller en blön $K_R(l, m)$. Men den blöna $K_R(l, m)$ måste innehålla en blå K_l eller en grön K_m.

Ännu fler färger

Vi kan tänka oss att kanterna i en komplett graf färgas med färger $f_1, f_2, \cdots f_s$. Antag att vi har talen $l_1, l_2, \cdots l_s$. Då betyder $R(l_1, l_2, ..., l_s)$ det minsta tal så att en komplett graf av denna storlek har en f_i-färgad K_{l_i} för något i.
Sats: $R(l_1, l_2, ..., l_s)$ existerar.
Beviset går till på samma sätt som ovanstående exempel.

En annan generalisering

Vi kan ge 3-gruppen färg.
Ex: Vi har en mängd med tal. Ge en 3-grupp färgen röd om ett av talen i gruppen kan skrivas som summan av de två andra. Ge 3-gruppen färgen blå annars. Frågan är då, finns det en mängd med k tal där alla tal är summan av två godtyckliga andra eller en mängd med l tal där inget tal är summan av två andra?

Ramseys sats (generell)

Antag att alla k-delmängder av en mängd M färgas med s färger. Då finns talet $R_k(l_1, l_2, ..., l_s)$ så att om storleken på M är $n \geq R_k(l_1, l_2, ..., l_s)$ så finns det en l_i-delmängd med alla k-delmängder färgade med färg f_i (för något i).

Szekeres problem

Finns det ett tal $f(n)$ så att om $f(n)$ punkter placeras i planet så finns det n av dem som bildar en konvex n-hörning?
Ex: Trivialt sant då $n = 3$. Annars är det inte så enkelt. Men svaret är ja. Beviset byggs upp i flera steg.

Steg 1

Om 5 punkter placeras så att inte 3 av dem ligger på en linje så måste 4 av dem bilda en konvex 4-hörning.
Bevis: Antag att vi har 5 punkter och ingen konvex 4-hörning. Då måste det **konvexa höljet** bilda en triangel. Kalla punkterna i triangeln för a,b,c. Då måste de övriga punkterna d,e ligga inuti triangeln. Bilda linjen d,e. Det finns en triangelsida som inte skärs av linjen. Antag t.ex att det är sidan med a,b. Då bildar a,b,d,e en konvex 4-hörning. Det ger motsägelse.

Steg 2

Om vi har en konvex n-hörning så bildar alla 4-mängder av punkter en konvex 4-hörning. Omvänt, om alla 4-mängder i en n-hörning är konvexa är hela n-hörningen konvex.
Bevis: Vi visar det sista steget. Antag att n-hörningen inte är konvex. Bilda konvexa höljet. Det bildar en konvex m-hörning med $m \leq n - 1$. Triangulera m-hörningen. Då finss en triangel som innehåller en 4:de punkt. Triangeln och den 4:de punkten bildar en 4-hörning som inte är konvex. Så om alla 4-hörningar är konvexa är hela n-hörningen konvex.

Ramsey-trick

Antag att antalet punkter är $N = R_3(n, 5)$ och att vi färgar varje 4-mängd röd $=$ konvex och blå $=$ inte konvex. Då finns det en n-hörning med alla 4-hörningar konvexa eller en 5-hörning med ingen 4-hörning konvex. Men det sista fallet är, som vi sett, omöjligt. Alltså finns det en konvex n-hörning.

En oändlig variant

En oändlig komplett graf består av noder $1, 2, \cdots$. Mellan varje par av noder i, j går det en kant. Antag att alla kanter färgas röda eller blå. Då finns det en oändlig mängd med noder $i_1, i_2, \cdots$ så att alla kanter mellan noderna har samma färg. Det finns med andra ord en oändlig, komplett, monokromatisk delgraf.

Bevis

Starta med att sätta $Y_1 = \{1, 2, \cdots\}$. Vi skall sedan konstruera en sekvens $\cdots Y_3 \subseteq Y_2 \subseteq Y_1$ där varje Y_i är oändlig. Antag att Y_i är konstruerad. Välj ett $y_i \in Y_i$ t.ex. första talet i Y_i. Ge varje tal x i $Y_i - \{y_i\}$ en färg $c^*(x) = c(y_i, x)$. Eftersom Y_i är oändlig måste en färg förekomma oändligt antal gånger. Välj Y_i till en sådan oändlig färgklass. Vi har nu $\cdots Y_3 \subseteq Y_2 \subseteq Y_1$ och talen $y_1, y_2, \cdots$. Varje tal har en färg $c^*(y_i)$. Den är relaterad till kantfärgen så att $c(y_i, y_j) = c^*(y_i)$ för alla $j > i$. Mängden $y_1, y_2, \cdots$ är oändlig.
En färg måste förekomma ett oändligt antal gånger. Antag t.ex. att $y_{i_1}, y_{i_2}, \cdots$ är en oändlig sekvens med $c^*(y_{i_1}) = c^*(y_{i_2}) = \cdots$. Då har alla kanter i mängden samma färg. De ger en oändlig monokromatisk delgraf.