

Tillämpad Kombinatorik, 2B1305

Undervisning:

v. 12–14 och 18–21

Föreläsare:

Johan Karlander

Rum 1445, NADA

E-post: johank@nada.kth.se

Telefon: 790 96 90 eller 070-686 74 66

Info om kurs: www.nada.kth.se/johank/TK-sida.html

Kursöversikt

- Grundläggande enumeration
- Genererande funktioner
- Mängdkombinatorik och design-teori
- Ramsey-teori
- Flöden och matchning
- Graffärgning och planaritet
- Polya-teori

Varför ser de ut som de gör?

Antalet sätt att välja k *ordnade* objekt ur mängd av n *särskiljbara* objekt
 $= \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Bevis: Konstruera antalet sätt att välja

k *ordnade* objekt ur mängd av n *särskiljbara* objekt. Det är

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Ordningen av de k objekten är irrelevant. "Kvota bort dengenom division med $k!$. Det ger $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ kombinationer.

Metoden med överräkning och utkvotning

Vi vill beräkna antalet strukturer av en viss typ. Strukturerna antas innehålla en viss *ordnad* del. *Överräkna* genom att införa en numrering. Beräkna antalet nya strukturer. *Kvota bort* numreringen.

Varför är binomialkoefficienterna heltal?

Rent aritmetiskt verkar det inte självklart att $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ måste vara heltal.

Enkel princip: Om ett komplicerat uttryck u kan visas räkna något *måste* u vara heltal.

Aritmetiskt bevis

Vi visar att om p är ett primtal och p^r delar $k!$ så måste p^r också dela $n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

I så fall kan alla faktorer i $k!$ divideras bort och divisionen går jämnt upp.

Om m är ett heltal och p ett primtal låter vi $f(m)$ vara högsta potensen av p som delar $m!$.

$f(m) = \lfloor \frac{m}{p} \rfloor + \lfloor \frac{m}{p^2} \rfloor + \dots + \lfloor \frac{m}{p^s} \rfloor$ där p^s är någon (spelar ingen roll vilken) p -potens som är större än m .

Högsta p -potens som delar $\frac{n!}{(n-k)!}$ är

$$f(n) - f(n-k).$$

$$f(n) - f(n-k) = \lfloor \frac{n}{p} \rfloor + \lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor + \dots + \lfloor \frac{n}{p^s} \rfloor$$

$$- \lfloor \frac{n-k}{p} \rfloor - \lfloor \frac{n-k}{p^2} \rfloor - \dots - \lfloor \frac{n-k}{p^s} \rfloor$$

För godtyckliga tal n, k, a gäller

$$\lfloor \frac{n}{a} \rfloor \geq \lfloor \frac{n-k}{a} \rfloor + \lfloor \frac{k}{a} \rfloor.$$

Det ger $\lfloor \frac{k}{a} \rfloor \leq \lfloor \frac{n}{a} \rfloor - \lfloor \frac{n-k}{a} \rfloor$.

$$f(n) - f(n-k) = \lfloor \frac{n}{p} \rfloor - \lfloor \frac{n-k}{p} \rfloor + \lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor - \lfloor \frac{n-k}{p^2} \rfloor + \dots + \lfloor \frac{n}{p^s} \rfloor - \lfloor \frac{n-k}{p^s} \rfloor$$

$$\geq \lfloor \frac{k}{p} \rfloor + \lfloor \frac{k}{p^2} \rfloor + \dots + \lfloor \frac{k}{p^s} \rfloor$$

$$= f(k).$$

Det är detta vi ville visa!

Tre viktiga identiteter

- $2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$
- $0 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$
- $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$

Metoder för att visa identiteter

- Direkt aritmetisk verifiering.
- Induktion.
- Potensserietrick.
- Kombinatorisk tolkning.

Bevis av identiteterna

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

Kombinatorisk tolkning:

Summan = Totala antalet delmängder = 2^n .

Potensserietrick:

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n.$$

Sätt $x = 1$ så får vi vår identitet.

Andra identiteten

$$0 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$$

Kombinatorisk tolkning:

Antalet jämna mängder = Antalet udda mängder.

Verkar inte finnas något enkelt sätt att se det?

Potensserietrick:

Sätt $x = -1$ i formeln för $(1+x)^n$.

Tredje identiteten

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

Potensserietrick:

$$(1+x)^{2n} = 1 + \dots + \binom{2n}{n}x^n + \dots + x^{2n}$$

Men samtidigt gäller $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n = (1 + \dots + \binom{n}{i}x^i + \dots + x^n)(1 + \dots + \binom{n}{j}x^j + \dots + x^n) = (1 + \dots + c_n x^n + \dots + x^{2n})$

$$c_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

Kombinatorisk tolkning:

Definiera en $2n$ -mängd med n röda och n blåa kulor. Kulorna är särskiljbara.

Antalet sätt att välja n kulor ur denna mängd är $\binom{2n}{n}$. Ett val måste bestå av

ett val av k röda kulor och $n-k$ blåa kulor. Talet k varierar mellan 0 och n .

För ett visst val av k blir antalet möjliga val $\binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \binom{n}{k}$. Totalt fås

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \text{ val.}$$

Den klassiska identiteten

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Försök visa den.

Dragning med återläggning

Antalet sätt att dra k kulor ur mängd med n kulor med återläggning är $\binom{n+k-1}{k}$.

Två bevis:

Via 0/1-sekvenser.

Via bijektion till växande sekvenser.

0/1-sekvenser:

Låt L vara en lista med k st nollor och $n-1$ ettor. Vi låter L motsvara draging med återläggning på följande sätt: Antalet nollor till vänster om 1:a ettan anger antalet val av den första av de n kulorna. Antalet nollor mellan etta $i-1$ och i anger antal val av kula i . Antal nollor efter sista ettan anger antal val av kula n .

Det totala antalet sådana listor är $\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}$ eftersom nollorna och ettorna inte är särskiljbara.

Bijektion till växande sekvenser:

Låt (a_1, a_2, \dots, a_k) vara en strikt växande sekvens av tal i $[1, n+k-1]$.

Antal sådana sekvenser är $\binom{n+k-1}{k}$. Om vi bildar sekvensen

$(a_1, a_2 - 1, a_3 - 2, \dots, a_i - (i-1), \dots, a_k - (k-1))$ får vi en sekvens som motsvarar en dragning med återläggning av tal i intervallet $[1, n]$.

Om (b_1, b_2, \dots, b_k) är en växande men inte nödvändigtvis strikt växande sekvens av tal i $[1, n]$ som motsvarar dragning med återläggning är $(b_1, b_2 + 1, \dots, b_i + (i-1), \dots, b_k + (k-1))$ en strikt växande sekvens av tal i $[1, n+k-1]$.

Binomialkoefficienter med negativa koefficienter

$\binom{-n}{k}$ tolkas som

$$\frac{(-n)(-n-1)\dots(-n-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}{k!} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}.$$

Antalet sätt att göra dragning med återläggning kan tolkas som $(-1)^k \binom{-n}{k}$.

Ytterligare notation

Med $[n]_k$ menar vi $n(n-1)\dots(n-k+1)$.

Med $[n]^k$ menar vi $n(n+1)\dots(n+k-1)$.

Det ger följande regler:

Antal dragningar av k kulor ur mängd av n utan återläggning = $\frac{[n]_k}{k!}$.

Antal dragningar av k kulor ur mängd av n med återläggning = $\frac{[n]^k}{k!}$.

Generande funktion

MacLaurinutveckling ger

$$\frac{1}{(1+x)^n} = (1+x)^{-n} = 1 + \binom{-n}{1}x + \dots + \binom{-n}{k}x^k + \dots$$

Serien är *oändlig*. Hur den kan användas visas i senare föreläsning.

Om α inte är ett heltal gäller $(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{k}x^k + \dots$

Här gäller $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$. Dessa binomialkoefficienter har ingen kombinatorisk tolkning.

Det finns ingen definition av binomialkoefficienter på formen $\binom{n}{-k}$.

Unimodalitet

Binomialkoefficienterna $\binom{n}{k}$ är strikt växande upp till $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ och strikt avtagande från $\binom{n}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$.

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}, \text{ för alla } n.$$

(Om n är jämnt är $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$).

Verkar självklart, eller? Hur bevisar man det?

Bevis med dubbelräkning

Vi visar att om $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ är $\binom{n}{k-1} < \binom{n}{k}$.

Vi räknar antalet par (A, B) där A är en $k-1$ -mängd, B är en k -mängd och $A \subseteq B$.

Kalla antalet för P . Vi räknar P på två olika sätt:

Till varje A -mängd kan man lägga till $n - k + 1$ element för att få B -mängd.

Det finns $\binom{n}{k-1}$ A -mängder.

$$P = (n - k + 1)\binom{n}{k-1}.$$

För varje B -mängd kan man dra ifrån k element för att få A -mängd.

Det finns $\binom{n}{k}$ B -mängder. $P = k\binom{n}{k}$.

Det ger $k\binom{n}{k} = (n - k + 1)\binom{n}{k-1}$.

$$\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1} > \binom{n}{k-1}.$$

På samma sätt kan man visa att

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}.$$

Fallet $k > \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ fås genom symmetri.