2D1240, TENTAMEN I NUMERISKA METODER gkII för DEFT
Lördag 27 oktober 2001 kl 8–13

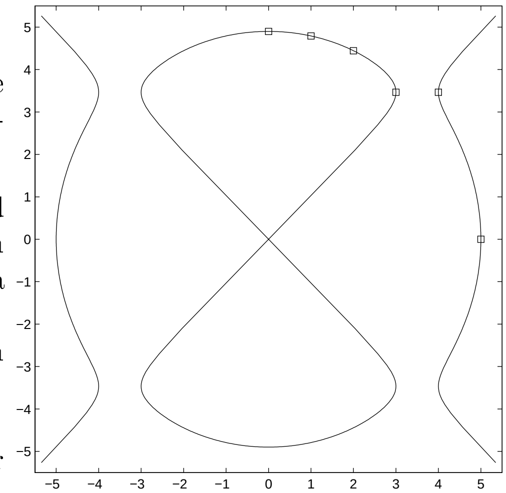
Betygsgränser (inkl bonuspoäng): 25p trea, 35p fyra, 45p femma, 50p sexa.

Resultatet anslås senast 12 nov på Nadas anslagstavla. Svar ska motiveras och räkningar redovisas!

Hjälpmedel i del 2: *Rosa formelsamlingen, Matlabhäftet, Betahandboken, räknedosa.* Lycka till!

DEL 2 (40 poäng) **(Delas ut när DEL 1 lämnas in!)**

1. *Diabolokurvan*



Ekvationen $y^4 - x^4 - 24y^2 + 25x^2 = 0$ studerades redan 1750 av den schweiziske matematikern G Cramer som gav den flergrenade kurvan namnet diabolokurva.

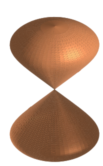
(5p) **a)** På kurvan är sex punkter markerade vid x-värdena 0, 1, 2, 3, 4, 5, och vi söker den ellips med centrum i origo som ger bästa möjliga anpassning till punkterna.
y^2-värdena (obs kvadraten!) är i tur och ordning:

$24,\ 12+\sqrt{120},\ 12+\sqrt{60},\ 12,\ 12,\ 0.$

Skriv en algoritm som beräknar och ritar ellipsen.

(5p) **b)** En kvadratisk bézierkurva $\mathbf{r}_2(t)$ får approximera diabolokurvans övre buktiga parti då $0 \le x \le 3$, och en kubisk bézierkurva $\mathbf{r}_3(t)$ utnyttjas för att approximera kurvan i intervallet $4 \le x \le 5$ för $y \ge 0$. Diabolokurvan har vertikal lutning vid $x = 3$, 4 och 5. Gör konstruktionsskiss för båda bézierkurvorna och diskutera lämpliga styrpunktsavstånd för $\mathbf{r}_3(t)$. Visa en algoritm för beräkning och uppritning av de båda kurvorna.

2. *Diabolovolymen*



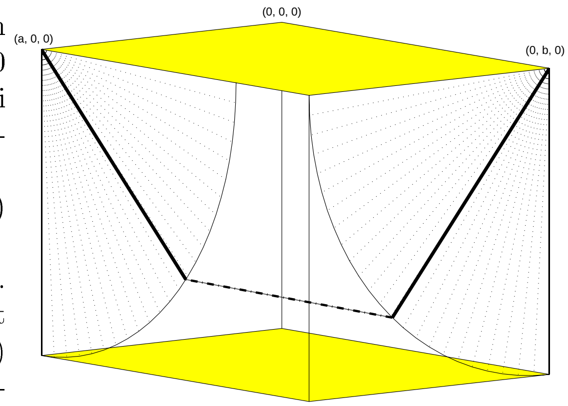
Namnet *diabolo* härstammar från den populära leksakssnurran i form av en rotationsdiaboloid som fås då inre grenen av diabolokurvan roteras kring y-axeln.

Hur stor är volymen $2\int_0^{y_{max}} \pi x^2\,dy$, där $y_{max} = \sqrt{24}$?
(Du kan väl lösa ut x^2 ur diaboloekvationen?)
Visa en lösningsalgoritm, dels med trapetsregeln, dels med någon annan numerisk integrationsmetod (t ex en av Matlabs inbyggda).
(7p) Hur kan man veta något om noggrannheten i det erhållna volymvärdet?
Beskriv (mindre detaljerat) ytterligare någon integrationsmetod som skulle kunna utnyttjas här.

Lektion i diabolospel. Trästick från 1800-talets början.

Vänd!

3. *Hopkopplade diabolopinnar*



De båda diabolopinnarna har längden $L = 0.40$ m och massan $m = 0.070$ kg. Pinne nr 1 har ena änden fastsatt i punkten (0, b, 0) och pinnen kan pendla i vertikalplanet $y = b$.
Pinne nr 2 hänger i punkten (a, 0, 0) och kan pendla i vertikalplanet $x = a$.
I vårt fall gäller $a = 0.40$ och $b = 0.55$.
Pinnarnas andra ände förenas med ett fjädrande band med naturlig (otöjd) längd $L_0 = 0.12$ m och med fjäderkonstanten $k = 3.0$.
Pinnarna släpps från horisontellt startläge och pendlar avstannande till ett läge där totala energin når minimum.

(8p) Låt vinkeln mellan lodlinje och pinne betecknas v_1 resp v_2, och låt ϵ vara bandtöjningen, hela bandlängden är alltså $L_0(1+\epsilon)$. Vi inför $C = m\,g/(2k\,L)$ där $g = 9.80$, samt beteckningarna $s_1 = \sin v_1,\ c_1 = \cos v_1,\ s_2 = \sin v_2,\ c_2 = \cos v_2$.
Följande ekvationer gäller:

$$
\begin{aligned}
&(a/L - s_1)^2 + (b/L - s_2)^2 + (c_1 - c_2)^2 = (1+\epsilon)^2 L_0^2/L^2 \\
&C\,s_1(1+\epsilon) + \epsilon\,(s_1c_2 - c_1\,a/L) = 0 \\
&C\,s_2(1+\epsilon) + \epsilon\,(s_2c_1 - c_2\,b/L) = 0
\end{aligned}
$$

De undre ekvationerna kan härledas ur energiminimering (behöver inte visas), men vad betyder den översta ekvationen?
Visa en fullständig algoritm för lösning av ekvationssystemet.

4. *Temperaturskikt i Lago di Abolo*

Under värmeböljan i somras var det behagligt att bada i Lago di Abolo, i alla fall om man inte dök för djupt utan höll sig i *epilimnion*-skiktet från ytan till cirka två meters djup. Därunder sjönk temperaturen snabbt i *språng*-skiktet mellan två och tre meters djup för att sedan avta långsamt igen (*hypolimnion*).
Mätningar varje meter från 0 till 6 meters djup gav följande temperaturvärden: 25.5, 25.0, 23.0, 16.5, 13.5, 12.5, 12.0.

(7p) **a)** Visa med en detaljerad algoritm hur man beräknar och ritar temperaturkurvan med styckvis interpolation. Bestäm själv om du vill utnyttja naturliga splines eller fusksplines. Inom språngskiktet finns *termoklinen* som betecknar det djup där temperaturkurvan har en inflexionspunkt. En fullständig algoritm ska också innehålla termoklinberäkningen.

b) (Kan behandlas utan att **4a** har lösts.)
(8p) När man ritar in de sju mätpunkterna i ett diagram ser man att de tycks ligga ungefär på en uppochnedvänd arcustangenskurva. Vi vill därför pröva att anpassa en modell $y \approx \alpha - \beta \arctan(px - q)$ till våra mätdata. Beskriv en effektiv iterativ metod som beräknar parametrarna α, β, p och q och som ritar upp resultatet. Ange även lämpliga startgissningar. Hur erhåller man termoklinen i detta fall?