Nada, KTH, Gerd Eriksson

2D1240, TENTAMEN I NUMERISKA METODER gkII för DEFT
Lördag 28 oktober 2000 kl 8–13

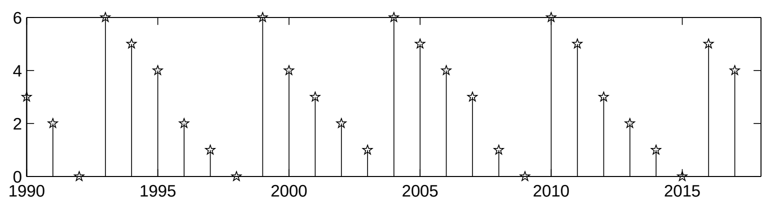
Betygsgränser: 25 poäng ger trea, 35p fyra, 45p femma (inklusive bonuspoäng).
Resultatet anslås senast 17 nov på Nadas anslagstavla. Svar ska motiveras och räkningar redovisas!
Hjälpmedel i del 2: *Rosa formelsamlingen, Matlabhäftet, Betahandboken, räknedosa.* Lycka till!

DEL 2 (40 poäng) **(Delas ut när DEL 1 lämnas in!)**

1. *Alla Helgons dag*

Alla Helgons dag ligger alltid på en lördag mellan 31 oktober och 6 november. Från år 1990 till år 2017 har denna lördag följande datum, där 0 betecknar 31 oktober:

3 2 0 6 5 4 2 1 0 6 4 3 2 1 6 5 4 3 1 0 6 5 3 2 1 0 5 4.



(5p) **a)** Anpassa med minstakvadratmetoden(MKM) utttrycket

$$F(t) = c_1 + c_2 \cos\omega(t - 2000) + c_3 \sin\omega(t - 2000)$$

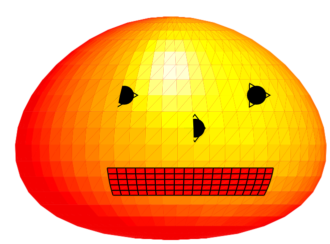
till datumen 1 0 6 4 3 2 för åren 1997–2002. Perioden T är ungefär sex år, använd därför $\omega = 2\pi/T = \pi/3$. Utför allt med handräkning (räknedosa behövs inte)! Beräkna koefficienterna, ange residualvektorn och verifiera ortogonalegenskaper.

(6p) **b)** Utnyttja nu alla 28 data för åren 1990–2017 för bästa MKM-anpassning av modellen $F(t)$ då även ω är okänd parameter. Beskriv detaljerat (gärna i MATLAB) en effektiv algoritm som bestämmer koefficienterna c_i och ω (som avviker från $\pi/3$).

2. *Halloween*

(4p) **a)** Årets pumpa har en kontur skapad av en kubisk bézierkurva i ett vertikalplan.

Pumpan bildas då kurvan roteras kring z-axeln. Bézierkurvan startar i origo och slutar på z-axeln på höjden 6. Start- och slutriktning är horisontella, nedre styrpunktsavståndet är 7 och det övre är 4 längdenheter.
Visa en konstruktionsfigur för pumpakonturen och ange dess polynomuttryck $x(t)$ och $z(t)$.



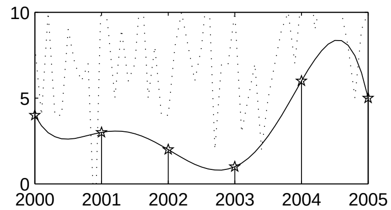
(6p) **b)** Skissera i MATLAB en algoritm som utnyttjar Newton-Raphsons metod för att finna de båda punkter på konturkurvan som ligger på avståndet 3.5 längdenheter från nedre styrpunkten. (De erhållna punkterna markerar munnens övre och nedre gräns.)

Vänd!

3. *Spökande kurva*

(5p) För t-värdena 2000, 2001, …, 2005 gäller datumuppsättningen $y = 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 6,\ 5$. Vi vill lägga ett interpolationspolynom av femte graden genom punkterna.

Med Newtons ansats erhålls den heldragna kurvan och med naiva ansatsen (och Horners algoritm) får man den prickade spökkurvan. Ge en förklaring till det mystiska resultatet.



Visa hur polynomkoefficienterna erhålls med den goda algoritmen i det aktuella fallet.

4. *Skräcksim*

I skräckfilmen *Alla helgons blodiga natt, 13* jagas huvudpersonen G av ett spöke med köttyxa. Hon försöker rädda sej genom att simma över den 700 m breda floden.

Differentialekvationssystemet

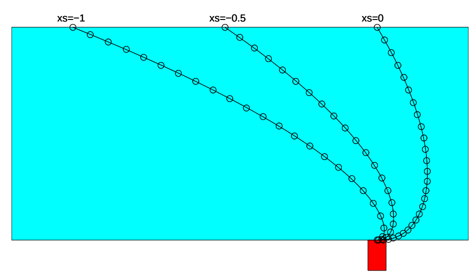
$$\frac{dx}{dt} = v_0 - \frac{v_s x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{v_s y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad x(0) = x_s,\ y(0) = 0.70, \qquad (1)$$

beskriver den bana som G följer då hon simmar med hastigheten $v_s = 2.5$ km/h mot bastubryggan i origo på nedre flodstranden och vattnet strömmar med $v_0 = 1.5$ km/h i positiv x-riktning. Längdenheten är km och tidsenheten timme.

(7p) **a)** Beskriv med detaljerad algoritm (MATLAB-skiss) hur man beräknar simbanorna i figuren med en ringmarkering för simmarens läge varje hel minut efter starten. Begynnelsevärdet x_s är i de tre fallen: $x_s = -1,\ -0.5,\ 0$.

Differentialekvationerna (1) vållar problem när simmaren närmar sig bryggan (både täljare och nämnare går mot noll). Använd (1) om $y > 0$, annars gränsvärdesuttrycken

$$dx/dt = v_0 - v_s,\ dy/dt = 0.$$



Den tid som simturen tar i de tre fallen ska skrivas ut.

Förklara också hur noggrannheten i tidsangivelsen kan bedömas i din algoritm.

b) Kan besvaras utan att uppgift 4a har lösts.

(4p) Den mellersta av de tre startpunkterna visar sig ge kortare tid för simturen än de övriga. Beskriv i ord en algoritm som med en tillåten osäkerhet på 10 meter bestämmer det x_s som ger allra kortaste tiden. Algoritmen kan genomföras i praktiken genom upprepad simning med tidtagning. Hur många simturer blir det (om inte köttyxspöket avbryter algoritmen)?

c) Kan besvaras utan att uppgift 4b har lösts.

(3p) När G i bastun möter motorsågsmumien upphäver hon under 10 s ett skrik med intensiteten $I(t) = e^{\sin 1000\pi t}$. Medelintensiteten ges av $I_{\text{medel}} = \frac{1}{10}\int_0^{10} I(t)\,dt$. Vilken numerisk metod beräknar I_{medel} snabbast och ungefär hur många funktionsberäkningar tror du att den behöver om femton korrekta siffror önskas?