

2D1240, TENTAMEN I NUMERISKA METODER gkII för DEFT**Lördag 29 april 2000 kl 8–13**

Betygsgränser: 25 poäng ger trea, 35 fyra, 45 femma. Resultatet anslås senast 16 maj på Nadas anslags-tavla. Svar ska motiveras och räkningar redovisas!

Hjälpmedel i del 2: *Rosa formelsamlingen, Matlabhäftet, Betahandboken, räknedosa.*

Lycka till!

DEL 2 (40 poäng) (Delas ut när DEL 1 lämnas in!)**1. Puckelproblem**

En symmetrisk puckel har toppvärdet 4 vid $r = 0$. Vid $r = \pm h$ har höjden sjunkit till 1 och vid $r = \pm 2h$ är den noll.

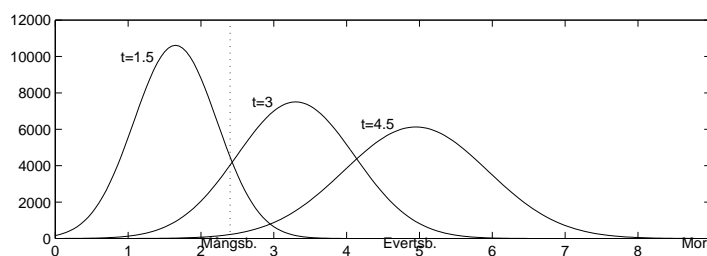
- (5p) a) Det finns ett polynom $P(r)$ av lägsta grad som uppfyller villkoren. Bestäm polynomets koefficienter som funktion av h . (Utnyttja att $P(r)$ är en jämn funktion.)
- (5p) b) Låt puckelprofilen interpoleras av naturliga kubiska splines. Av symmetriskäl räcker det att betrakta positiva r . Vid $r = 0$ är lutningen noll. Beräkna kurvlutning-
en vid $r = h$ och $r = 2h$ och ange splinesuttrycken för $0 \leq r \leq h$ och $h \leq r \leq 2h$.
- (6p) c) En annan modell för puckelprofilen är $Q(r) = a + be^{-cr^2}$, och man vill även här att interpolationsvillkoren ska gälla. Beskriv en fullständig algoritm (gärna i Matlab) för bestämning av de tre parametrarna uttryckta i h .

2. Vasaloppet – en skidlöarpuckel

Vasaloppet från Sälen till Mora är 9.0 mil. Drygt 15000 skidåkare startar samtidigt, men snart sprids fältet av åkare ut. Koncentrationen (mätt i antal löpare per längd-enhet) bildar som figuren visar en puckelkurva, vars topp rör sig mot Mora med hastigheten 1.1 mil i timmen. Om man bortser från det sportsliga handlar det om konvektionsdiffusion och koncentrationen ges då av

$$u(x, t) = \frac{C}{\sqrt{t}} e^{-a(x-vt)^2/t}$$

där vi med enheterna mil och timme har $v = 1.1$ samt $C = 13000$, $a = 2.3$.



Med dessa parametervärden blir arean under puckelkurvan (för varje t) 15193 skidåkare. I en kontinuerlig modell är det svårt att tala om en exakt segertid, men efter 4 tim 40 min (medelmåttig segertid) har mängden 1.0 åkare passerat mållinjen.

- (7p) a) Vasaloppskontrollen Mångsbodarna ligger 2.4 mil från starten. Blåbärssoppsfunktionärerna har det stressigt under den tidsperiod mellan t_1 och t_2 då u -värdet där överstiger 3300 åkare/mil vilket motsvarar att en åkare i sekunden passerar. Ge en utförlig algoritm (gärna i Matlab) för beräkning av tidpunkterna t_1 och t_2 .

b) En mugg innehåller 0.2 liter blåbärssoppa. Soppåtgången S_{kaos} i Mångsbodarna ($x_M = 2.4$) under den kaotiska tiden mellan t_1 och t_2 får man genom att multiplicera med antal åkare som passerar. Man måste alltså integrera antalet åkare per tidsenhet, men eftersom u anger antalet löpare per mil blir en rimlig formel:

$$S_{kaos} = 0.2v \int_{t_1}^{t_2} u(x_M, t) dt.$$

(4p) Diskutera några lämpliga sätt (varav ett ska vara detaljerat) för beräkning av soppåtgången S_{kaos} .

(3p) c) Totala mängden blåbärssoppa som går åt i Mångsbodarna bestäms i teorin av $S_{tot} = 0.2v \int_0^\infty u(x_M, t) dt$. Vilka åtgärder kan man vidta (med hjälp av sunt förnuft) för att praktiskt kunna beräkna integralen S_{tot} ? Föreslå en metod som ger totala soppåtgången med fyra siffrors noggrannhet.

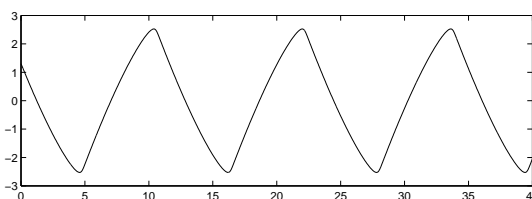
3. Lord Rayleighs bravader

Den så kallade struttformeln¹ förekommer i Lord Rayleighs storverk "The Theory of Sound" som utreder allt från fågelkvitter till jordbävningar och som så småningom gav honom nobelpriset i fysik 1904.

a) Ett mystiskt nattligt hoholjud anses följa struttformeln enligt

$$y'' - 5y'(1 - (y')^2) + y = 0$$

med $y(0) = 1.3$, $y'(0) = -1$, vars lösningskurva $y(t)$ efter ganska kort tid får ett periodiskt förlopp enligt figuren.



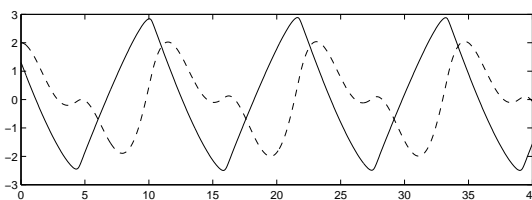
(4p) Skriv om till ett system av första ordningens differentialekvationer och beskriv lämpligt numeriskt förfarande för beräkning och uppritning av lösningskurvan till $t = 40$.

(3p) b) Utvidga algoritmen så att den också omfattar noggrann bestämning av periodtiden (femsiffrig precision önskas).

c) I en oscillograf får svängningen styra en ljusstråle i y -led samtidigt som den påverkas i x -led enligt följande differentialekvationssystem:

$$\begin{aligned} y'' - 5y'(1 - (y')^2) + y + x/2 &= 0, \\ x'' - \alpha(2yy' - x) &= 0 \end{aligned}$$

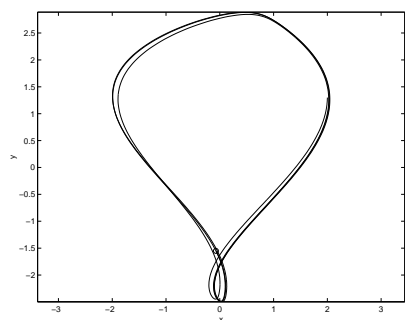
med $y(0) = 1.3$, $y'(0) = -1$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$. När α har värdet 0.23 erhålls figurens kurvor $x(t)$ och $y(t)$.



Oscillografen visar (efter en kort insvängningstid) en periodisk öglefigur skapad av koordinaterna $(x(t), y(t))$.

(3p) Visa hur omskrivningen till ett första ordningens differentialekvationssystem görs och beskriv tillvägagångssättet för att beräkna och rita upp öglefiguren.

Lord Rayleigh drog slutsatsen att hoho-ljudet måste vara ett ögleläte.



¹Rayleigh hette Strutt i förnamn.