

LÖSNINGAR till Tentamen i 2D1240 Numeriska metoder gk2, 2001-10-27

1. Diabolokurvan

a) Ellipsens ekvation är $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ som med $c_1 = 1/a^2$ och $c_2 = 1/b^2$ kan skrivas $c_1x^2 + c_2y^2 = 1$. Bestäm c_1 och c_2 med minstakvadratmetoden. I matrisform gäller

$$\begin{pmatrix} 0 & 24 \\ 1 & 12 + \sqrt{120} \\ 4 & 12 + \sqrt{60} \\ 9 & 12 \\ 16 & 12 \\ 25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

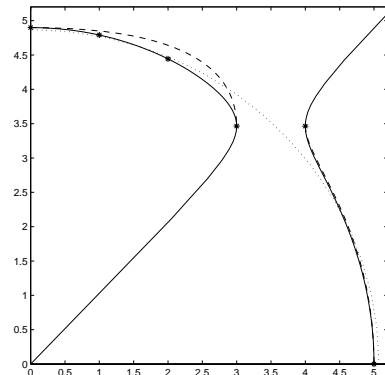
```
x=(0:5)'; y2=[24 12+sqrt(120) 12+sqrt(60) 12 12 0]'; plot(x,sqrt(y2),'*'), hold on
A=[x.^2 y2], HL=ones(6,1); c=A\HL; a=1/sqrt(c(1)), b=1/sqrt(c(2))
v=0:pi/30:pi/2; plot(a*cos(v), b*sin(v),':'), axis equal
```

b) Kvadratisk bézierkurva från $x = 0$ till $x = 3$, styrpunkten bestäms så att kurvlutningen är horisontell i början och vertikal i slutet, $\mathbf{b} = (3, \sqrt{24})$. Kurvan är streckad (bättre anpassning erhålls med kubisk bézierkurva).

Kubisk bézierkurva från $x = 4$ till $x = 5$; via en skiss kommer man fram till att lagom styrpunktsavstånd är 0.5 resp 2.

```
t=(0:0.05:1)';
p1=[0 sqrt(24)]; p2=[3 sqrt(12)]; b=[3 sqrt(24)];
F2=[(1-t).^2 2*t.*(1-t) t.^2];
r=F2*[p1;b;p2]; plot(r(:,1),r(:,2),'m--')

q1=[4 sqrt(12)]; q2=[5 0];
k=[0 -1]; % vertikal lutning
d1=0.5; d2=2; % lagom styrpunktsavstånd
b=q1+d1*k; c=q2-d2*k;
F3=[(1-t).^3 3*t.*(1-t).^2 3*t.^2.*(1-t) t.^3];
r=F3*[q1;b;c;q2]; plot(r(:,1),r(:,2),'r--')
```



2. Diabolovolymen

Lös ut x^2 ur diaboloekvationen: $x^2 = 12.5 - \sqrt{12.5^2 - y^2(24 - y^2)}$. Börja med t ex $n = 25$ intervall i trapetsregeln med steget $dy = y_{max}/n$. För tillförlitlighetsbedömning: fördubbla antalet intervall några gånger och skriv ut (och jämför) volymvärdena.

Annan tänkbar metod (förutom Matlabs quad) är Gauss-Kronrods femtonpunktsformel (g7k15, NAM 5.4) i ett par delintervall: $0 \leq y \leq 4$ och $4 \leq y \leq y_{max}$.

```
ymax=sqrt(24); n=25;
for koll=1:4
    dy=ymax/n; y=0:dy:ymax; x2=12.5-sqrt(12.5^2-y.^2.*(24-y.^2));
    f=pi*x2; V=2*dy*(sum(f)-0.5*(f(1)+f(n+1))), n=2*n;
end
% Successivt erhålls: V=127.026, 127.168, 127.203, 127.212
% Matlabs quad-funktion (med standardtolerans 1e-6):
Vq=2*pi*quad('12.5-sqrt(12.5^2-y.^2.*(24-y.^2))',0,ymax) % Vq=127.215
```

3. Hopkopplade diabolopinnar

Den första ekvationen är Pythagoras sats i rymden för avståndet mellan pinnarnas nedre ändpunkter (= bandlängden).

Använd Newtons metod för ickeinjära system. Gissa vinklarna 30° och töjningen 50%, dvs $\epsilon = 0.5$. Jacobianen fås genom att de tre ekvationerna deriveras m.a.p. v_1, v_2, ϵ .

```

a=0.40; b=0.55; L=0.40; m=0.070; g=9.80; k=3.0; L0=0.12; C=m*g/(2*k*L);
v1=30*pi/180; v2=v1; ep=0.5; v=[v1 v2 ep]'; dvnorm=1; iter=0;
while dvnorm>1e-8 & iter<10
    s1=sin(v(1)); c1=cos(v(1)); s2=sin(v(2)); c2=cos(v(2)); Lfj=L0*(1+ep);
    f=[(a/L-s1)^2+(b/L-s2)^2+(c1-c2)^2-(1+ep)^2*(L0/L)^2
        C*s1*(1+ep)+ep*(s1*c2-a/L*c1)
        C*s2*(1+ep)+ep*(s2*c1-b/L*c2)];
    J=[-2*c1*(a/L-s1)-2*s1*(c1-c2) -2*c2*(b/L-s2)+2*s2*(c1-c2) -2*(1+ep)*(L0/L)^2
        C*c1*(1+ep)+ep*(c1*c2+a/L*s1) -ep*s1*s2 C*s1+s1*c2-a/L*c1
        -ep*s2*s1 C*c2*(1+ep)+ep*(c2*c1+b/L*s2) C*s2+s2*c1-b/L*c2];
    dv=-J\f; dvnorm=norm(dv); v=v+dv; iter=iter+1; ep=v(3);
end
v1=v(1)*180/pi, v2=v(2)*180/pi, ep, totaldist=L0*(1+ep)
% Svar: v1=40.83, v2=47.88, ep=1.423, totaldist=0.291

```

4. Temperaturskikt i Lago di Abolo

a) Både naturliga splines och fusksplines visas här. Vid inflexionspunkten gäller $y'' = 0$. Derivera hermiteinterpolationsuttrycket två gånger: $y''(t) = -2g_3 + (2 - 6t)c_3 = 0$ vilket ger $t = (1 - g_3/c_3)/3$ och termoklinen $x = 2 + t$.

```

x=(0:6)'; y=[25.5 25.0 23.0 16.5 13.5 12.5 12.0]'; dy=diff(y);
subplot(2,1,1), plot(x,y,'o'), hold on
for studie=1:2
    if studie==1 % naturliga splines
        dia=[2 4 4 4 4 4 2]'; sup=ones(6,1); sub=sup;
        b=3*[dy(1); dy(2:6)+dy(1:5); dy(6)]; k=tridia(dia,sup,sub,b)
    else % fusksplines, lutningar med centraldifferenskvot
        k=[0 -1.5/2 -8.5/2 -9.5/2 -4/2 -1.5/2 0]' % lämpligt med k1=k7=0
    end
    end
    g=k(1:6)-dy; c=2*dy-(k(1:6)+k(2:7)); t=0:0.1:1;
    for i=1:6
        xt=x(i)+t; yt=y(i)+t*dy(i)+t.*(1-t)*g(i)+t.^2.*(1-t)*c(i);
        if studie ==1, plot(xt,yt,'r--'), else plot(xt,yt,':'), end
    end
    tp=(1-g(3)/c(3))/3 % inflexionspunkt
    xp=x(3)+tp, yp=y(3)+tp*dy(3)+tp*(1-tp)*g(3)+tp^2*(1-tp)*c(3)
    if studie==1, plot(xp,yp,'r*'), else plot(xp,yp,'x'), end
end

```

```

% b) Gauss-Newtons metod, ickelinjärt överbestämt system, f=0 där
% f=a-b*arctan(px-q)-y, Gissa a, b, p, q genom egenskaper hos arctan.
a=18; b=(25-18)/(pi/2); lutn_xp=16.5-23; p=-lutn_xp/b, q=p*2.5, c=[a b p q]';
for iter=1:5
    u=p*x-q; g=atan(u); f=a-b*g-y; fnorm=norm(f) % fnorm ska nå minimum
    J=[ones(7,1) -g -b*x./(1+u.^2) b./(1+u.^2)];
    dc=-J\f; c=c+dc; a=c(1); b=c(2); p=c(3); q=c(4);
end
a,b,p,q, xp=q/p, yp=a, plot(xp,yp,'mp') % termoklin där px-q=0
X=0:0.2:6; plot(X,a-b*atan(p*X-q))
% Nat.splines, termoklin xp=2.55, yp=19.5, Fusksplines: xp=2.52, yp=19.7
% Arctanmodell: a=18.95, b=4.947, p=1.586, q=4.230, xp=2.67, yp=18.95

```

