

## LÖSNINGAR till Tentamen i 2D1240 Numeriska metoder gk2, 2000-10-28

## 1. Alla Helgons dag

a) Vi får ett överbestämt system med sex ekvationer och tre obekanta.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 1 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 1 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^T \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 16 \\ 6.5 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$c_1 = 8/3$ ,  $c_2 = 13/6$ ,  $c_3 = -\sqrt{3}/6$ . Residualvektor:  $1/2, -11/6, 2, -5/6, -1/2, 2/3$ . Ortogonalitetsegenskap:  $\mathbf{A}^T \mathbf{r} = \mathbf{0}$ ; beräkning av vänsterledet  $\mathbf{A}^T \mathbf{r}$  ger önskade nollor.

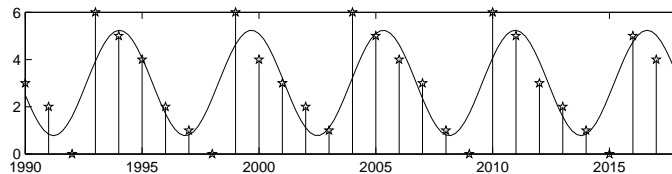
b) Använd Gauss-Newtons metod på det icke linjära överbestämde systemet

$$F(t_i) = c_1 + c_2 \cos \omega(t_i - 2000) + c_3 \sin \omega(t_i - 2000) - y_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 28$$

Goda startgissningar till de fyra parametrarna  $c_1, c_2, c_3, \omega$  krävs, och de hämtas ur uppgift 1a. Jacobianen blir en  $28 \times 4$  matris.

```
t=(1990:2017)'; tc=t-2000; T=1990:0.2:2018; Tc=T-2000;
y=[3 2 0 6 5 4 2 1 0 6 4 3 2 1 6 5 4 3 1 0 6 5 3 2 1 0 5 4]';
stem(t,y,'p'), hold on
c=[8/3 13/6 -sqrt(3)/6 pi/3]';
for iter=1:5
    f=c(1)+c(2)*cos(w*tc)+c(3)*sin(w*tc)-y; fnorm=norm(f)
    J4=-c(2)*tc.*sin(w*tc)+c(3)*tc.*cos(w*tc);
    J=[ones(size(tc)) cos(w*tc) sin(w*tc) J4]; dc=-J\f; c=c+dc; w=c(4);
end, cvec=c(1:3)', w
Y=c(1)+c(2)*cos(w*Tc)+c(3)*sin(w*Tc); plot(T,Y)
```

Med goda startgissningar når  $\|\mathbf{f}\|_2$  sitt minimum redan efter tre eller fyra iterationer. Resultat:  $c_1 = 3.0083$ ,  $c_2 = 2.0873$ ,  $c_3 = -0.7895$ ,  $w = 1.1130$  ( $\pi/3 = 1.0472$ ).



## 2. Halloween

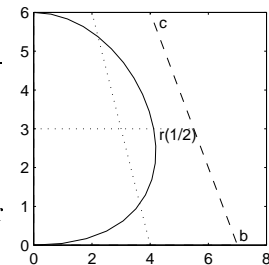
a) Styrpunkterna är  $(7, 0)$  och  $(4, 6)$ . Eftersom första interpolationspunkten är origo blir uttrycket för bézierkurvan:

$$\mathbf{r}(t) = 3t(1-t)^2(7, 0) + 3t^2(1-t)(4, 6) + t^3(0, 6). \text{ Det ger } x(t) = 21t - 30t^2 + 9t^3 \text{ och } z(t) = 18t^2 - 12t^3.$$

b) Ekvationen kan skrivas  $(x(t) - 7)^2 + (z(t))^2 - 3.5^2 = 0$  som är på formen  $f(t) = 0$ . Derivatan blir  $2x'(t)(x(t) - 7) + 2z'(t)z(t)$ ,

där  $x'(t) = 21 - 60t + 27t^2$  och  $z'(t) = 36t - 36t^2$ . Lämpliga startgissning är  $t = 0.2$  till nedre skärningspunkten och  $t = 0.5$  till den övre.

(Resultatet blir  $t = 0.2721$  med pumpakoordinaterna  $(3.6744, 1.0911)$  resp  $t = 0.3933$  med koordinaterna  $(4.1663, 2.0543)$ .) Algoritm i MATLAB följer här:



```

tgiss=[0.2 0.5];
for nr=1:2
    t=tgiss(nr); dt=1;
    while abs(dt/t)>1e-10
        x=21*t-30*t^2+9*t^3; z=18*t^2-12*t^3; xp=21-60*t+27*t^2; zp=36*t-36*t^2;
        f=(x-7)^2+z^2-3.5^2; fp=2*(x-7)*xp+2*z*zp; dt=-f/fp; t=t+dt;
    end, t

```

### 3. Spökande kurva

a) Naiv ansats:  $P(t) = a_1 + a_2t + a_3t^2 + a_4t^3 + a_5t^4 + a_6t^5$ . Det leder till ett helfyllt system med en  $6 \times 6$  vandermondematrix med ettor i första kolumnen,  $t$ -värdena 2000, ..., 2005 i andra kolumnen, kvadraterna på  $t$  i tredje, osv till sjätte kolumnens  $2000^5, \dots, 2005^5$ . Konditionstalet blir mycket stort, mer än  $10^{16}$  så att koefficienterna inte får en enda korrekt siffra. Vid polynomvärdesberäkningen blir det svåra cancellationer (se NAM 3.4). Hackigheten är ett faktum!

b) Newtons ansats:  $P(t) = c_1 + c_2(t-2000) + c_3(t-2000)(t-2001) + c_4(t-2000)(t-2001)(t-2002) + c_5(t-2000)(t-2001)(t-2002)(t-2003) + c_6(t-2000)(t-2001)(t-2002)(t-2003)(t-2004)$ . Vi får ett system med triangulär matrix och små heltal som matriselement. Framåtsubstitution ger  $c_1 = 4, c_2 = -1, c_3 = 0, c_4 = 0, c_5 = 1/4, c_6 = -1/5$ .

### 4. Skräcksim

a) G siktar mot bryggan men förs allt längre medströms så att hon slutligen måste simma motströms (se figuren i tentatexten). I detta skede går hastighetens  $y$ -komponent mot noll och dess  $x$ -komponent mot  $v_0 - v_s$ . Med  $u_1 = x$  och  $u_2 = y$  blir differentialekvationens högerled:

```

function f=fsimx(u)
    v0=1.5; vs=2.5; x=u(1); y=u(2); s=sqrt(x^2+y^2);
    if y>0, f=[v0-vs*x/s -vs*y/s]; else f=[v0-vs 0]; end

```

Lös med RK4 först med tidssteget 1 minut ( $dt = 1/60$ ) så länge  $y$  är positivt och notera tiden vid framkomsten till bryggan. Räkna om med steget en halvminut (nu markeras enbart vartannat värde med ring). Tidsangivelsen får då en osäkerhet på en halv minut.

```

b=0.7; plot(0,0,'x',[0 0],[0 b],':'), axis equal, hold on
for J=1:2, dt=1/(J*60); % ta J tidssteg per minut
    for xs=-1:0.5:0
        u=[xs b]; U=u; t=0; T=t;
        while u(2)>0 % simma till bryggan
            f1=fsimx(u); f2=fsimx(u+dt*f1/2);
            f3=fsimx(u+dt*f2/2); f4=fsimx(u+dt*f3);
            u=u+dt*(f1+2*f2+2*f3+f4)/6; U=[U; u]; t=t+dt; T=[T; t];
        end
        N=length(T); tidminuter=t*60, X=U(:,1); Y=U(:,2);
        plot(X,Y, X(1:J:N),Y(1:J:N),'o') % ring ritas varje minut
    end
end
end

```

I while-slingans sista genomlöpning blir  $y$  negativt, därför behövs if-satsen i `fsimx`. Simturen tar 23, 21, 26 minuter (med en halv minuts osäkerhet) för resp  $x_s = -1.0, -0.5, 0$ .

b) Vi förmodar att simtiden som funktion av  $x_s$  är unimodal för  $-1 \leq x_s \leq 0$ . Bestäm minimum med gyllenesnittetsökning. I varje iteration krymper intervallet med faktorn  $(\sqrt{5}-1)/2 = 0.618$ . Eftersom  $x_s$ -intervallet högst får vara 10 m, dvs 0.010 km, får vi sambandet  $0.618^n \cdot 1 = 0.010$ , där  $n$  är antalet iterationer. Efter logaritmering erhålls  $n = 9.57$ , alltså krävs 10 simningar utöver de tidigare tre för att bestämma snabbaste simtur.

En noggrannare tidsangivelse än den i a-uppgiften krävs förstås, t ex kan algoritmen modifieras så att sista simsnutten före bryggan räknas med förfinat tidssteg (t ex en sekund). Snabbaste simtur uppnås om G hoppar i vid  $x_s = -0.505 \pm 0.005$  och den tar 21 min 0 sek.

c) Integranden är periodisk med perioden  $T = 1/500$ ; under 10 sekunder blir det 5000 svängningar.  $I_{medel} = 5000 \cdot \frac{1}{10} \int_0^T I(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T I(t) dt$ . Trapetsregeln är bästa algoritm för integration av periodiska funktioner över en hel period, och det räcker oftast med färre än 50 delintervall för att få datorprecision. (Här räcker faktiskt  $n = 7$  och resultatet blir 1.26606587775201.)