G Eriksson, Nada

LÖSNINGAR till Tentamen i 2D1240 Numme gk2, 2000-11-25

1. *Gallerdaller*

Integralens undre gräns vållar problem. Substituera $t = \sqrt{x}$, dvs $t^2 = x$, $2t\,dt = dx$

$$\Longrightarrow \int_0^a f(x)dx = \int_0^{\sqrt{a}} g(t)dt = \int_0^{\sqrt{a}} \frac{2(3+2\cos t^2)(1+\cos 2\pi t^2)}{\sqrt{2+t^2}}\,dt$$

```
function f=fgbuller(t)
   f=2*(3+2*cos(t.^2)).*(1+cos(2*pi*t.^2))./sqrt(2+t.^2);
```

Man kan använda quad8 från 0 till $\sqrt{16}$: `I=quad8('fgbuller',0,4,0.5e-4)`
(Integralvärdet blir 14.230.) Om trapetsregeln utnyttjas krävs många delintervall eftersom integranden oscillerar kraftigt (även efter substitutionen), börja t ex med $n = 80$ och fördubbla antalet intervall några gånger tills relativa avvikelsen blir acceptabelt liten. Det visar sig att två fördubblingar till $n = 320$ räcker för önskad precision.
En alternativ algoritm är att låta substitutionen bara omfatta intervallet $0 \le x \le 0.5$ och låta den ursprungliga funktionen integreras i intervallet $0.5 \le x \le 16$.

```
function f=fbuller(x)
   f=(3+2*cos(x)).*(1+cos(2*pi*x))./sqrt(2*x+x.^2);
```

Vi visar en lösning med Gauss-Kronrods metod i sexton intervall som går från nollställe till nollställe (utom i början och slutet, se koden).

```
[Igk,gkfel]=g7k15('fgbuller',0,sqrt(0.5));
for i=1:14, [I,fel]=g7k15('fbuller',i-0.5,i+0.5); Igk=Igk+I; gkfel=gkfel+fel; end
[I,fel]=g7k15('fbuller',14.5,16); Igk=Igk+I, gkfel=gkfel+fel
```

2. *Bullermuller*

Ur funktionskurvans skärning med $y = 1$ kan vi utläsa approximationer till de elva rötterna till ekvationen $f(x) = 1$, se `xgiss` nedan. Man kan utnyttja sekantmetoden på $f(x) - 1 = 0$, då behövs två startgissningar till varje rot. Här visas lösning med Newton-Raphsons metod på den omskrivna ekvationen $(3+2\cos x)(1+\cos 2\pi x) - \sqrt{2x+x^2} = 0$. Derivatan av vänsterledet behövs (`fp` i koden).

```
xgiss=[0.3 0.8 1.3 1.8 2.2 4.8 5.2 5.8 6.2 6.8 7.2]; X=[];
for nr=1:11
  x=xgiss(nr);  dx=1;
  while abs(dx/x)>1e-10
    f=(3+2*cos(x))*(1+cos(2*pi*x))-sqrt(2*x+x^2);
    fp=-2*sin(x)*(1+cos(2*pi*x))-2*pi*sin(2*pi*x)*(3+2*cos(x))-(1+x)/sqrt(2*x+x^2);
    dx=-f/fp; x=x+dx;
  end,  X=[X x];
end
disp('Intervallen är'), disp([0 X(1)]), for nr=2:2:10, disp(X(nr:nr+1)), end
```

3. *Thrillerpiller*

Ur figuren kan vi avläsa att kurvan är unimodal i intervallen $8.7 \le x \le 9.3$ och $9.7 \le x \le 10.3$. Gyllenesnittetsökning är lämplig för att hitta toppunktskoordinaterna:

```
r=(sqrt(5)-1)/2; q=1-r;
for n=9:10
  a=n-0.4; b=n+0.4;
  x1=a+q*(b-a); f1=fbuller(x1); x2=a+r*(b-a); f2=fbuller(x2);
  while b-a>1e-6
    if f1>f2, b=x2; x2=x1; f2=f1;  x1=a+q*(b-a); f1=fbuller(x1);
       else   a=x1; x1=x2; f1=f2;  x2=a+r*(b-a); f2=fbuller(x2);
    end
  end, xm=(x1+x2)/2; ym=f1; maxkoord=[xm ym]
end
```

Koordinaterna är (8.9575, 0.2408) respektive (10.0379, 0.2447). Tiotoppen är alltså högst!

4. *Propellertabeller*

Med $u_1 = y,\ u_2 = y'$ och $u_3 = y''$ blir differentialekvationens högerled:

```
function f=ftryck(u)
    f=[u(2) u(3) -exp(u(1))-u(2)];
```

Lös med RK4 och med tidssteget $dt = 0.1$. Varje gång y' övergår från positivt till negativt backar man och tar ett kortare steg för att hamna i maxpunkten (den kortare steglängden ges av linjär interpolation, dvs ett steg i sekantmetoden). Så fortsätter man tills ett maximum blir mindre än noll.

```
u=[1 0 0]; t=0; dt=0.1; u2old=0; T=t; Y=u(1); ytopp=1; ttopp=0; antal=1;
for steg=1:1000
  f1=ftryck(u); f2=ftryck(u+dt*f1/2); f3=ftryck(u+dt*f2/2); f4=ftryck(u+dt*f3);
  u=u+dt*(f1+2*f2+2*f3+f4)/6; t=t+dt;
  if u2old>0 & u(2)<0
    ddt=u(2)/(u2old-u(2))*dt;
    f1=ftryck(u); f2=ftryck(u+ddt*f1/2);
    f3=ftryck(u+ddt*f2/2); f4=ftryck(u+ddt*f3);
    utopp=u+ddt*(f1+2*f2+2*f3+f4)/6;  if utopp(1)<0, break, end
    ytopp=[ytopp; utopp(1)]; ttopp=[ttopp; t+ddt]; antal=antal+1;
  end
  u2old=u(2); T=[T; t]; Y=[Y; u(1)];
end
plot(T,Y), antal, toppar=[ytopp ttopp]
```

5. *Skapalättpalett*

Hermiteinterpolera med $h = \pi/4$. Derivatorna k_i bestäms av $k_1 = (r_2 - r_8)/2h = 2(-8)/\pi$, $k_i = (r_{i+1} - r_{i-1})/2h$ för $i = 2, 3, ..., 7$, och $k_8 = (r_1 - r_7)/2h = 2(-5)/\pi$.
Derivatavektorn blir $\frac{2}{\pi}(-8, -7,\ 3,\ 9,\ 4,\ 3,\ 1, -5)$.
Studera sista intervallet från $\varphi_8 = 7\pi/4,\ r_8 = 16$ till $\varphi_9 = \varphi_1 = 2\pi,\ r_9 = r_1 = 12$.
Då gäller $\Delta r_8 = -4$ och $h\,k_8 = \frac{\pi}{4}(\frac{-10}{\pi}) = -2.5,\ \ g_8 = h\,k_8 - \Delta r_8 = -2.5 + 4 = 1.5$ och $c_8 = 2\Delta r_8 - h(k_8 + k_1) = -8 - \frac{\pi}{4}(\frac{-10}{\pi} + \frac{-16}{\pi}) = -1.5$.
Polynomet uttryckt i lokala variabeln t blir $P(\frac{7\pi}{4} + t\frac{\pi}{4}) = 16 - 4t + 1.5t(1-t) - 1.5t^2(1-t)$.
I intervallets mitt har t värdet 0.5 och polynomvärdet blir 14.1875.
Ett program som ritar palettkonturen kan se ut så här:

```
h=pi/4; fi=h*(0:7)'; r=[12 8 5 11 14 15 17 16]';  rr=[r; r(1)]; dr=diff(rr);
k=[(r(2)-r(8)); r(3:8)-r(1:6); r(1)-r(7)]/(2*h);  kk=[k; k(1)]; g=h*k-dr;  c=2*dr-h*(k+kk(2:9));
t=(0.1:0.1:1)';  R=r(1);  Fi=0;
for i=1:8
  rherm=r(i)+t*dr(i)+t.*(1-t)*g(i)+t.^2.*(1-t)*c(i);  R=[R; rherm]; Fi=[Fi; fi(i)+t*h];
end
plot(R.*cos(Fi),R.*sin(Fi)), axis equal
```

6. *Strömkarlar*

Residualerna visar tendens till två svängningsperioder mellan 0 och 2π. Man bör alltså inspireras att bygga ut modellen med termerna $c_4 \cos 2\varphi + c_5 \sin 2\varphi$.
Modellen är ett trigonometriskt polynom, och med åtta ekvidistanta vinkelvärden får vi ett överbestämt system $\mathbf{Ac} \approx \mathbf{r}$ med ortogonala kolumner i 8×5-matrisen $\mathbf{A}$. Det innebär att $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ blir en diagonalmatris.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A}^T\mathbf{r}$ har komponenterna $98, -3.4142, -20.4853,\ 4, -4$. På grund av ortogonaliteten ändras inte de tre första koefficienterna. Och vi får utan några större räkningar $c_4 = 1$ och $c_5 = -1$.