

## LÖSNINGAR till Tentamen i 2D1240 Numeriska metoder gk2, 2000-04-29

## 1. Puckelproblem

a) Genom fem punkter kan ett entydigt fjärdegradspolynom läggas. Av symmetriskäl blir det en jämn funktion (endast jämna potenser av  $r$ ),  $P(r) = 4 + c_1 r^2 + c_2 r^4$ . Villkoren  $P(h) = 1$  och  $P(2h) = 0$  ger ekvationerna  $4 + c_1 h^2 + c_2 h^4 = 1$  och  $4 + 4c_1 h^2 + 16c_2 h^4 = 0$ . med lösning:  $c_1 = -11/(3h^2)$ ,  $c_2 = 2/(3h^4)$ . Polynomet är  $P(r) = 4 - \frac{11}{3}(\frac{r}{h})^2 + \frac{2}{3}(\frac{r}{h})^4$ .

b) Naturliga kubiska splines önskas.  $\Delta y_1 = 1 - 4 = -3$ ,  $\Delta y_2 = -1$ . Vi känner  $k_1 = 0$  och vill bestämma  $k_2$  och  $k_3$ . Rosa formelsaml. sid 3 nederst:  $0 + 4k_2 + k_3 = \frac{3}{h}(\Delta y_1 + \Delta y_2)$ ,  $k_2 + 2k_3 = \frac{3}{h}\Delta y_2$ , dvs  $4k_2 + k_3 = \frac{3}{h}(-4)$ ,  $k_2 + 2k_3 = \frac{3}{h}(-1)$ , som ger  $k_2 = -\frac{3}{h}$ ,  $k_3 = 0$ . För  $0 \leq r \leq h$  erhålls  $y(0 + th) = 4 - 3t + 3t(1 - t) + [2(-3) - h(0 - \frac{3}{h})]t^2(1 - t) = 4 - 3t + 3t(1 - t) - 3t^2(1 - t) = 4 - 6t^2 + 3t^3$ . (Parametern  $t$  går mellan 0 och 1.) För  $h \leq r \leq 2h$  erhålls  $y(h + th) = 1 - t + (-3 + 1)t(1 - t) + [-2 - h(-\frac{3}{h} + 0)]t^2(1 - t) = 1 - t - 2t(1 - t) + t^2(1 - t) = 1 - 3t + 3t^2 - t^3$ .

c) Ickelinjär modell  $Q(r) = a + be^{-cr^2}$ . Tre obekanta  $a, b, c$  och tre ekvationer:  $a + b = 4$ ,  $a + be^{-ch^2} = 1$ ,  $a + be^{-4ch^2} = 0$ . Inför  $v = e^{-ch^2}$  så kan ekvationerna skrivas:  $a + b - 4 = 0$ ,  $a + bv - 1 = 0$ ,  $a + bv^4 = 0$ . Flera olika lösningsförfaranden finns. Alternativ 1, behåll alla obekanta och lös det icke linjära systemet med Newtons metod.

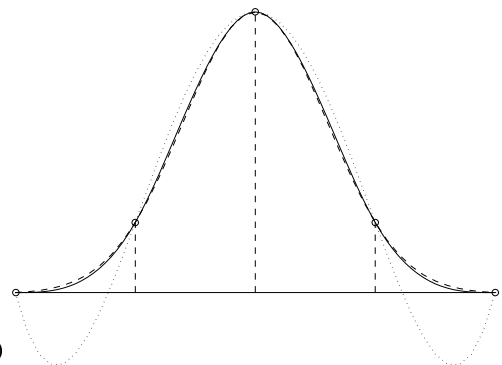
Funktionsuttrycket lyder  $f = \begin{pmatrix} a + b - 4 \\ a + bv - 1 \\ a + bv^4 \end{pmatrix}$  med jacobianen  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & v & b \\ 1 & v^4 & 4bv^3 \end{pmatrix}$ .

Goda startgissningar krävs, en skiss med en normalfördelningskurva till mätvärdena ger  $a \approx 0$ ,  $b \approx 4$  (puckelhöjden). Vad är lämplig  $v$ -gissning? Insättning i ekvation 2 ger  $v \approx 1/4$ . Algoritmen ges i Matlab nedan. När  $a, b, v$  bestämts erhålls  $c$  ur  $\log v = -ch^2$ , dvs  $c = -\frac{\log v}{h^2}$ .

Alternativ 2, eliminera  $a$ , två ekvationer kvar:  $b(1 - v) - 3 = 0$ ,  $bv(1 - v^3) - 1 = 0$  med jacobianen  $J = \begin{pmatrix} 1 - v & -b \\ v(1 - v^3) & b(1 - 4v^3) \end{pmatrix}$ . Lös med Newtons metod med startgissningar för  $b$  och  $v$  som ovan.

Alternativ 3, eliminera  $b$  också, kvar blir  $v(1 - v^3)/(1 - v) = 1/3$  som kan förenklas till  $v(1 + v + v^2) - 1/3 = 0$ . Lös med Newton-Raphsons metod med startvärdet 0.25. När  $v$ -värdet bestämts fås övriga obekanta ur  $b = 3/(1 - v)$ ,  $a = 4 - b$  och  $c = -\frac{\log v}{h^2}$ .

```
% Alternativ 1:
p=[0 4 0.25]'; dpnorm=1; iter=0;
while dpnorm>1e-6 & iter<8
    a=p(1); b=p(2); v=p(3);
    f=[a+b-4 a+b*v-1 a+b*v^4]';
    J=[1 1 0; 1 v b; 1 v^4 4*b*v^3];
    dp=-J\f; dpnorm=norm(dp,inf);
    p=p+dp; iter=iter+1;
end
a=p(1), b=p(2), v=p(3), c=-log(v)
% h=1 i detta exempel
r=[-2 -1 0 1 2]'; y=[0 1 4 1 0]';
rr=-2:0.1:2; Q=a+b*exp(-c*rr.^2);
stem(r,y,'--'), hold on, plot(rr,Q,'--')
```



% Resultat: a=-0.0165, b=4.0165, c=1.3741/h^2

I figuren är  $Q(r)$  streckad, fjärdegradspolynomet  $P(r)$  prickad och splinekurvan heldragen.

## 2. Vasaloppet – en skidlöparpuckel

a) Det gäller att finna de båda  $t$ -värden som är rötter till ekvationen

$$\frac{C}{\sqrt{t}} e^{-a(x_M - vt)^2/t} = 3300.$$

Lös med sekantmetoden direkt (med 3300 överflyttat till vänsterledet) eller med Newton-Raphsons metod på den logaritmerade ekvationen (som ju är lättare att derivera):  $0.5 \log t + a(x_M - vt)^2/t + \log 3300 - \log C = 0$ . Vi gissar att stressen vid Mångsbodarna börjar ungefär en timme efter starten i Sälen och slutar tre timmar efter start, alltså  $t_1 \approx 1$  och  $t_2 \approx 3$ . Algoritm i Matlab nedan.

b) Integrationen kan göras med trapetsregeln med t ex  $N = 200$  delintervall mellan  $t_1$  och  $t_2$  (för noggrannhetskontroll bör beräkning även göras med  $N = 400$ ). Alternativt kan Matlabs `quad8` utnyttjas med lämpligt vald relativ tolerans, se Matlabkoden.

c) Singulariteten vid undre gränsen  $t_0 = 0$  trasslar, i praktiken kan vi låta  $t_0 = 1/4$  för under första kvarten hinner säkert ingen fram till blåbärssoppan i Mångsbodarna, och oändligheten bör kunna skäras ned till säg åtta timmar. Nu kan samma metoder som ovan tillämpas. Totala soppatgången beräknas enklare (med begärda fyra siffrors noggrannhet):  $S_{tot} = 0.2 \cdot 15193 = 3039$  liter (alla 15193 skidåkarna passerar ju Mångsbodarna).

```
function vasaloppek
global C alfa xM
alfa=2.3; C=13000; L=9; xM=2.4;           % xM vid Mångsbodarna
ustress=3300;                             % passage av 1 åkare/sek
% a) Gissning 1 tim resp 3 tim efter start
t1=ftsolv(1,ustress), t2=ftsolv(3,ustress)

% b) Blåbärssoppa 2 dl/mugg under kaotiska tiden från t1 till t2:
N=200; dt=(t2-t1)/N; t=t1:dt:t2; uM=fvasaquad(t);
Skaos =0.2*1.1*dt*(sum(uM)-0.5*(uM(1)+uM(N+1)))
SQkaos=0.2*1.1*quad8('fvasaquad',t1,t2,1e-5)

% c) Total soppatgång:
t0=1/4; tmax=8;
dt=(tmax-t0)/400; t=t0:dt:tmax; uM=fvasaquad(t); Stot=0.2*1.1*dt*sum(uM)
SQtot=0.2*1.1*quad8('fvasaquad',t0,tmax,1e-5)

%-----
function rot=ftsolv(t0,ukoll)                % Newton-Raphsons metod
global C alfa xM
t=t0; dt=1;
while abs(dt/t)>0.5e-7
    f=0.5*log(t)+alfa*(xM-1.1*t)^2/t+log(ukoll)-log(C);
    fprim=0.5/t+alfa*(-2.2*(xM-1.1*t)/t-(xM-1.1*t)^2/t^2);
    dt=-f/fprim; t=t+dt;
end, rot=t;

%-----
function u=fvasaquad(t)                      % Integrandfunktion
global C alfa xM
u=C./sqrt(t).*exp(-alfa*(xM-1.1*t).^2./t);
%-----

% t1=1.4034, t2=3.1307, Skaos=2517 liter, Stot=3039 liter soppa
```

### 3. Lord Rayleighs bravader

a) Med  $u_1 = y$  och  $u_2 = y'$  blir högerledet i differkvationssystemet  $d\mathbf{u}/dt = \mathbf{f}(t, \mathbf{u})$ :

```
function f=fstrutt1(t,u)
    f=[u(2) 5*(1-u(2)^2)*u(2)-u(1)]';
```

Matlabs ode45 kan användas, men kräv högre precision än standardtoleransen.

```
% struttformler
u0=[1.3 -1]'; options=odeset('RelTol',1e-5);
[T,U]=ode45('fstrutt1',[0 40],u0,options);
subplot(2,1,1), plot(T,U(:,1))
```

b) Periodtiden kan beräknas som avståndet mellan två toppar, t ex andra och tredje toppen. I förslaget här stegar vi med RK4 och använder linjär interpolation (en iteration i sekantmetoden) för att bestämma tiden där derivatan är noll, dels nära  $t = 21$ , dels nära  $t = 33$ .

```
function v=fRKstrutt1(t,v,dt) % ett RK4steg
    f1=fstrutt1(t,v); f2=fstrutt1(t+dt/2,v+dt*f1/2);
    f3=fstrutt1(t+dt/2,v+dt*f2/2); f4=fstrutt1(t+dt,v+dt*f3);
    v=v+dt/6*(f1+2*f2+2*f3+f4);
```

```
% b) Forts. på programmet struttformler:
dt=0.1; t=0; v=[1.3 -1]'; V=v';
while t<20 | v(2)>0
    v=fRKstrutt1(t,v,dt); V=[V; v']; t=t+dt;
end, n=length(V(:,1))
yp1=V(n-1,2); yp2=V(n,2); topptid1=t-dt*yp2/(yp2-yp1) % linjär interpol.
while t<32 | v(2)>0
    v=fRKstrutt1(t,v,dt); V=[V; v']; t=t+dt;
end, n=length(V(:,1))
yp1=V(n-1,2); yp2=V(n,2); topptid2=t-dt*yp2/(yp2-yp1) % linjär interpol.
period=topptid2-topptid1
```

För att få en bedömning av noggrannheten i periodtiden bör räkningarna göras om med halverat tidssteg, alltså  $dt=0.05$  (eventuellt fler gånger, kollas interaktivt). Perioden blir 11.611 med femsiffrig precision.

c) Med  $u_1 = y$ ,  $u_2 = y'$ ,  $u_3 = x$ ,  $u_4 = x'$  kan högerledet i differkvationssystemet  $d\mathbf{u}/dt = \mathbf{f}(t, \mathbf{u})$  skrivas:

```
function f=fstrutt2(t,u)
    alfa=0.23;
    f2=5*(1-u(2)^2)*u(2)-u(1)-u(3)/2;
    f=[u(2) f2 u(4) alfa*(2*u(1)*u(2)-u(3))]';
```

Matlabprogrammet fortsätter förslagsvis så här för att beräkna och rita kurvorna  $y(t)$  och  $x(t)$  samt öglefiguren.

```
% c) Forts. på struttformler
u0=[1.3 -1 2 0]'; options=odeset('RelTol',1e-5);
[T,U]=ode45('fstrutt2',[0 40],u0,options);
Y=U(:,1); X=U(:,3);
subplot(2,1,2), plot(T,Y, T,X,'--')
figure(2), clf, plot(X,Y), axis equal
```