



2D1240 Numeriska metoder gk2

LABORATION 2

Integraler, ekvationer, differentialekvationer, tillförlitlighet

Sista dag för bonuspoäng, se kursplanen. Kom väl förberedd och med välordnade papper till redovisningen. Numeriska resultat ska finnas noterade (gärna handskrivna). Båda i laborationsgruppen ska kunna redogöra för teori och algoritmer!

1. Rotationssymmetrisk lur

Konturen för en rotationssymmetrisk lur definieras av funktionskurvan

$$y(x) = \frac{e^{-x/3}}{2 - \cos \pi x}, \quad 0 \leq x \leq L.$$

Luren uppstår genom att kurvan roteras kring x -axeln och rotationsvolymen är $V = \pi \int_0^L y^2 dx$. Pröva några olika integrationsmetoder för att bestämma volymen för en lur med längden $L = 2.6$.

Börja med trapetsregeln med steglängderna 0.1 och 0.05 och extrapolera en gång så att simpsonvärdet erhålls. Hur många siffror verkar tillförlitliga?

Använd sedan MATLABS `quad` dels med standardtolerans och dels med en tolerans som garanterar tio korrekta decimaler i volymvärdet (gör `help quad`).

En fin tredimensionell lurbild gör man så här: Låt x och f vara kolumnvektorer för konturkurvan $y(x)$. Skapa en radvektor för rotationsvinkeln $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ med lagom steg, t ex $2\pi/30$. Bilda matriser X , Y och Z :

$$X=x*\text{ones}(\text{size}(f_i)); \quad Y=f*\cos(f_i); \quad Z=f*\sin(f_i);$$

Skriv `mesh(X,Y,Z)` som ger en nätfigur eller välj `surf(X,Y,Z)` eller `surf1(X,Y,Z)` som ger en fylld 3D-figur (gör gärna `help surf1`).

2. Strålningseffekt enligt Plancks strålningslag

I MÖ 10 ritades kurvor över $w(\lambda, T) = \frac{\alpha}{\lambda^5(e^{\beta/(\lambda T)} - 1)}$ vid olika temperaturer. Beräkna strålningseffekten

$$E = \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} w(\lambda, T) d\lambda$$

i det synliga våglängdsområdet från 390 till 770 nm vid temperaturen 6000 K. Använd `quad` eller `quad1`.

Gör experimentell störningsräkning för att skatta tillförlitligheten i strålningseffektvärdet, när man vet att det kan vara en osäkerhet på ± 1 nm i våglängdsangivelserna. Ange effektvärdet med felgränser på lämplig form (t ex i enheten megawatt).

Alla numeriska resultat som det frågas efter i laborationsuppgifterna ska redovisas (gärna handskrivna) med lämpligt antal siffror motiverade av tillförlitlighetsbedömningen!

3. Periodiskt — trapetsregeln!

Givet är den periodiska funktionen $f(t)$ som ska integreras över en period:

$$f(t) = \frac{e^{\cos(\pi t/2)}}{2 + \sin \pi t + 0.5 \cos(\pi t/2)}, \quad I = \int_0^T f(t) dt$$

Vad är perioden T ? Rita upp integrandkurvan över tre perioder. Integralvärdet önskas med stor noggrannhet, helst nära datorprecision.

Trapetsregeln är bästa metod för integration av periodiska funktioner då intervallet är en hel period (enligt Euler-Maclaurins summationsformel).

Beräkna integralen med trapetsregeln med $n = 20$ och 40 . Betrakta resultaten och fortsätt att fördubbla och studera hur snabbt integralapproximationerna uppnår datorprecision (med osäkerhet först i femtonde siffran). Vid vilket n -värde har det nåtts och vad blir integralvärdet?

4. Ellipsens omkrets

a) För en ellips med storaxeln $2a$ och lillaxeln $2b$ gäller att omkretsen bestäms av uttrycket

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 v} dv.$$

Integrandfunktionen är periodisk. Vad är perioden?

Låt $a = 10$ och beräkna omkretsen med mycket stor noggrannhet för ellipser med följande värden på halva lillaxeln: $b = 7, 5, 3, 1$.

Rita upp de fyra ellipserna, använd parameterformen som för en ellips med centrum i (m_x, m_y) och halvaxlarna a och b lyder

$$x_{\text{ellips}}(\varphi) = m_x + a \cos \varphi, \quad y_{\text{ellips}}(\varphi) = m_y + b \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

b) Den indiske självlärd matematikern Srinivasa Ramanujan (1887–1920) föreslog följande approximativa formel för ellipsens omkrets:

$$O_{\text{Ramanujan}} = \pi(a + b) \left(1 + \frac{3c}{10 + \sqrt{4 - 3c}} \right) \quad \text{där } c = \frac{(a - b)^2}{(a + b)^2}.$$

Hur bra är den? Beräkna avvikelsen mellan integralvärdet och ramanujanvärdet i de fyra fallen.

5. Skärning mellan lur och cylinder

Gå tillbaka till lurproblemet och notera värdet på rotationsvolymen med tre decimaler. Beräkna radien R hos den cylinder som har samma längd $L = 2.6$ och upptar samma volym som luren. Problemet är nu att räkna fram var luren och cylindern skär varann. Det gäller att lösa ekvationen $y(x) = R$, där vänsterledet är lurens konturfunktion. Använd Newton-Raphsons metod men skriv först om ekvationen lämpligt (*redovisas*)! Markera skärningspunkterna på lurkurvan.

Ta ut mellanresultat så att den kvadratiske konvergens hos Newton-Raphsons metod kan utläsas.

Beräkna hur mycket en osäkerhet på ± 0.001 i rotationsvolymen påverkar skärningspunkternas koordinatvärden. Ge svaren (gärna handskrivna) enligt kravet längst ner på sidan 17.

6. Löparbana med sekantmetoden

En ellipsformad 400-meters löparbana ska anläggas på en plan som är 160 meter lång. Hur bred plan krävs? Lös med sekantmetoden och använd Ramanujans formel för omkretsen.

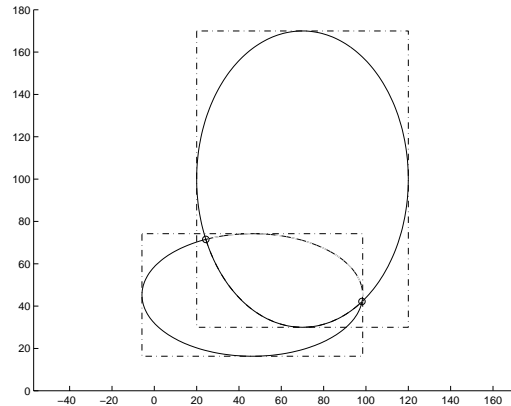
7. Skärning mellan ellipser

Skapa en rektangel med övre vänstra hörnet i punkten $(20, 170)$ och med nedre högra hörnet i punkten $(120, 30)$.

Lägg en ellips inuti rektangeln enligt figuren. Skapa en ny rektangel genom grafisk inmatning av dess övre vänstra och nedre högra hörnpunkt. Rektanglarna ska skära varandra. Inneslut en ellips i den nya rektangeln. Varje skärningspunkt (x_s, y_s) mellan ellipserna uppfyller sambanden

$$\frac{(x_s - m_{x1})^2}{a_1^2} + \frac{(y_s - m_{y1})^2}{b_1^2} = 1,$$

$$\frac{(x_s - m_{x2})^2}{a_2^2} + \frac{(y_s - m_{y2})^2}{b_2^2} = 1.$$



En effektiv algoritm för beräkning av skärningspunkterna är Newtons metod för ickelinjära system. Utnyttja den för att bestämma en skärningspunkt i taget. Markera de erhållna punkterna med en ring.

Undersök hur det ligger till med egenskapen kvadratisk konvergens i din algoritm. Kontrollera också hur startvärdeskänslig skärningspunktsalgoritmen är. Experimentera med smala och mer cirkulära ellipser och med olika startgissningar!

8. Bästa cirkelanpassning, nu med ickelinjär modell

Anpassa en cirkel till punkterna $(1.1, 0.7)$, $(1.5, 1.9)$, $(2.2, 3.1)$, $(3.2, 3.0)$, $(4.5, 2.3)$, $(4.8, 1.0)$, nu med cirkeln skriven på formen $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$.

Det blir ett överbestämt ickelinjärt ekvationssystem. Använd Gauss-Newtons metod för lösningen. Skriv i varje iteration ut värdet på det uttryck som minimeras i Gauss-Newtons metod. Rita upp de givna punkterna och den bästa cirkeln. Ange värdet på radien och mittpunktens koordinater.

9. Min- och maxpunktsbestämning

Den periodiska funktionen i uppgift 3 har två minpunkter och två maxpunkter i intervallet $0 < t < T$. Använd gyllenesnittetsökning för att bestämma extrempunkternas koordinater med fem korrekta decimaler.

Hur fungerar algoritmen och vilka konvergensgenskaper har den?

Föreslå någon alternativ metod för att lösa det aktuella problemet.

10. Lurig differentialekvation

Givet är differentialekvationsproblemet

$$y'' + \pi y e^{x/3} (2y' \sin \pi x + \pi y \cos \pi x) = y/9, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1/3.$$

a) Inför nya variabler $u_1 = y$ och $u_2 = y'$, så att differentialekvationen kan skrivas om till ett system av två första ordningens differentialekvationer.

Utnyttja MATLABs `ode45` för numerisk lösning fram till $x = 2.6$. Använd en relativ tolerans på 10^{-6} . Rita upp lösningskurvan och jämför den med lurkonturen i uppgift 1.

b) Om man utöver u_1 och u_2 inför u_3 med egenskapen $du_3/dx = \pi y^2 = \pi u_1^2$, med $u_3(0) = 0$, så får systemet tre första ordningens differentialekvationer.

Vilken innebörd har den nytillkomna ekvationen? Lös med `ode45` med toleransen ovan och skriv ut det numeriska värdet av u_3 vid $x = 2.6$. Verkar det bekant? Förklara den geometriska innebörden av resultatet.

MATLABs `ode45` har standardtoleransen $\text{reltol} = 10^{-3}$ som används om man inte tar med toleransparametern i funktionsanropet. Pröva detta och skriv ut värdet av u_3 vid $x = 2.6$. Vad är din kommentar till resultatet?

Hur många timmar ungefär har Laboration 2 tagit?

2D1240, Numeriska metoder gk2

Laboration 2 redovisad och godkänd!

Datum:

Namn:.....

Godkänd av