Gerd Eriksson, NADA
2002-06-28

2D1240 Numeriska metoder gk2

LABORATION 1

Kurvanpassning och interpolation

Sista dag för bonuspoäng, se kursplanen. Kom väl förberedd och med välordnade papper till redovisningen. Numeriska resultat ska finnas noterade (gärna handskrivna). Båda i laborationsgruppen ska kunna redogöra för teori och algoritmer!

1. **MÖ-uppgifterna**

   En introduktion till MATLAB finns på sidan 2 i det här häftet. Följ anvisningarna där och arbeta igenom så många som möjligt av MÖ-uppgifterna. Du kommer att ha stor nytta av det i fortsättningen!
   Om du tycker att det tar alltför lång tid att göra dem, kan du hoppa över några nu. Men gå i så fall tillbaka och titta på de resterande MÖ-uppgifterna senare!

2. **Dagens längd i Stockholm**

   I almanackan kan man hitta tider för solens upp- och nedgång för några orter i Sverige. Tabellen nedan anger dagens längd i Stockholm den första dagen i varje månad under sommarhalvåret (tiden är angiven decimalt):

Månad:	1 april	1 maj	1 juni	1 juli	1 aug	1 sep
Dagnr :	91	121	152	182	213	244
Solen uppe:	13.2	15.8	18.0	18.4	16.6	14.1

a) Anpassa ett andragradspolynom till dessa data. Rita de sex givna punkterna och polynomkurvan med tät indelning (dagligen från dag 91 till dag 244). Hur länge är solen uppe på nationaldagen den 6 juni enligt denna modell? Vilken är årets längsta dag enligt denna modell? (Derivera polynomet.)

b) Tabellen kompletteras med vinterhalvårets värden:

Månad:	1 jan	1 feb	1 mars	1 okt	1 nov	1 dec
Dagnr :	1	32	60	274	305	335
Solen uppe:	6.1	8.0	10.4	11.4	8.7	6.6

Markera de tolv punkterna i en figur. Varför är inte polynomanpassning lämplig? Ett trigonometriskt uttryck $c_1 + c_2 \cos \omega t + c_3 \sin \omega t$ där $\omega = \frac{2\pi}{365}$ bör kunna ge god anpassning. Undersök detta och rita kurvresultatet (dagligen från nyårsdagen till dag 365) tillsammans med givna data. Rita också residualvektorns tolv komponenter mot de tolv givna dagnumren. Beräkna felkvadratsumman samt nationaldagens soltid enligt denna modell.

c) Residualvektorn visar periodiska egenskaper (vilken frekvens?) och det innebär att modellen bör kunna förbättras till:

$$F(t) = c_1 + c_2 \cos \omega t + c_3 \sin \omega t + c_4 \cos k\omega t + c_5 \sin k\omega t, \text{ där } k \text{ är ett litet heltal.}$$

Om du inte av residualbilden inser vilket det är, kan du pröva dig fram experimentellt. Rita även nu kurvresultat och residual enligt ovan. Felkvadratsumman och nationaldagssoltiden ska anges!

3. **Hitta bästa cirkel till givna punkter**

a) Sex punkter är givna: $(-2, 2)$, $(-1, 5)$, $(2, 4)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(3, 1)$. Det gäller att finna den bäst anpassande cirkeln. Lös med minstakvadratmetoden det överbestämda ekvationssystem som erhålls då cirkelns ekvation skrivs enligt MÖ 12: $c_1 + c_2x + c_3y = x^2 + y^2$.
Härled denna linjära formel ur cirkelns vanliga ekvation och ange uttrycket för radien (*redovisas!*). Rita upp de givna punkterna och cirkeln. Notera värdena på mittpunktskoordinaterna och radien!
Hur ser systemmatrisen i normalekvationerna ut? Handräkna fram den!

b) Utnyttja grafisk inmatning (se MÖ 9) och klicka tio punkter ungefärligen runt en cirkel. Beräkna och rita bästa cirkel.

4. **Unika personliga interpolationskurvor**

Låt vektorn **v** bestå av tio vinkelvärden: $0, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \ldots, \frac{9\pi}{5}$. Låt vektorn **s** utgöras av siffrorna i ditt personnummer, adderade med 2 (alltså $2 \leq s_i \leq 11$).

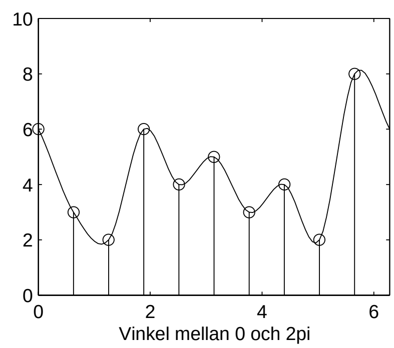
a) Lägg ett interpolationspolynom genom alla punkterna (v_i, s_i), $i = 1, ..., 10$. Använd `stem(v,s)` för markering av punkterna och rita kurvan i intervallet $0 \leq v \leq 2\pi - \frac{\pi}{5}$. (Hur blir figuren om kurvan ritas fram till 2π?)
Eftersom personnumret är unikt blir din polynomkurva mycket personlig. Svänger den kraftigt (vad kallas fenomenet) eller är du en lugnare natur?

b) Beräkna och rita en interpolerande kurva konstruerad av naturliga kubiska splines. Utnyttja i din algoritm att punkterna är ekvidistanta. De givna punkterna måste förstås finnas med i figuren.
Rita också en splinekurva konstruerad av MATLAB-splines i samma figur.

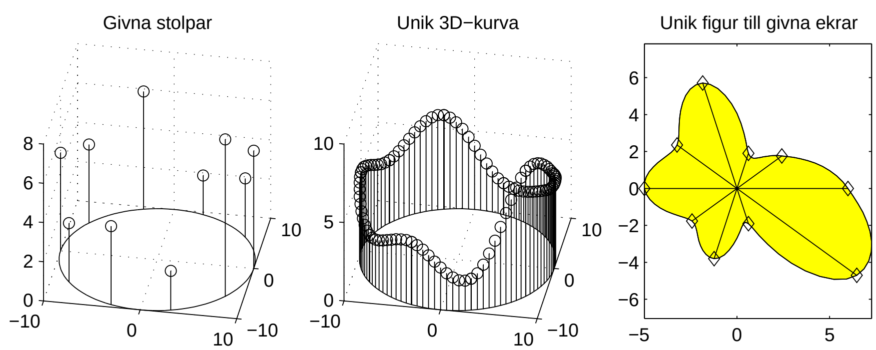
c) Det gäller nu att till de tio punkterna ovan konstruera en fuskplineskurva som är periodisk med perioden 2π.

Fuskspline: Hermiteinterpolation med centraldifferenskvot för lutningarna i interpolationspunkterna.

Periodiciteten innebär att funktionsvärdet och lutningen vid vinkeln 0 ska återkomma vid 2π. Handrita en figur och tänk dig för så att du inte hamnar i en fälla när du skriver algoritmen! Markera punkterna med `stem(v,s)`. Beräkna och rita de tio kurvstyckena mellan 0 och 2π enligt figuren.



d) Berg- och dalbana runt en cirkelperiferi och en unik amöba.



De tio stolparna runt cirkeln i den vänstra figuren skapas med

```
R=10; stem3(R*cos(v),R*sin(v),s)
```

Utnyttja fusksplinesresultatet i uppgift **c** för att åstadkomma din egen berg-och dalbana enligt mittbilden.

Ekrarna i den högra amöbafiguren skapas med satserna

```
xe=s.*cos(v); ye=s.*sin(v); plot(xe,ye,'d'), hold on
for i=1:10, plot([0 xe(i)],[0 ye(i)]), end, axis equal
```

Använd även här fusksplinesresultatet för att konstruera din egen unika slutna kurva. Fyll din identitetsamöba med önskad färg.

5. **Kaskad av bézierkurvor**

   Rita en kaskad av m stycken kubiska bézierkurvor som alla startar i punkten (0, 5) och går ned lodrätt i slutpunkten (10, 0). Kurvornas startvinkel ska vara $2\pi j/m$ för $j = 1, ..., m$ med m-värdet valt mellan 60 och 120. Välj de båda styrpunktsavstånden så att resultatet blir effektfullt. Visa gärna flera uppsättningar av bézierkaskader vid redovisningen!

6. **Hjärta eller sexa eller sektionsbokstav med kalligrafieffekt**

   Konstruera ett snyggt hjärta, en vacker sexa, ett δ, ε, φ eller annan skrivstilsbokstav med hjälp av några kvadratiska eller kubiska bézierkurvor (eventuellt kompletterat med något rakt streck).
   Gör först för hand en skiss av din önskade figur och markera lämpliga interpolationspunkter (några placeras t ex där kurvan lutar vertikalt eller horisontellt). Skriv ett program och modellera fram en formskön bézierkurvefigur. Lagra alla beräknade x- och y-värden i varsin vektor, säg `X` och `Y`.
   Kalligrafieffekt får man genom att förskjuta hela kurvan en aning snett uppåt (med pyttelitet `d`-värde) och rita om den många gånger (tio eller kanske fler) enligt: `for k=1:10, plot(X+k*d, Y+k*d), end`

Hur många timmar ungefär har den här laborationen tagit?

En fråga på kursenkäten i slutet av kursen kommer att gälla tidsåtgång och laborationsomfång. Tänk redan nu igenom vad som är bra och vad som skulle kunna förbättras!

2D1240, Numeriska metoder gk2

Laboration 1 redovisad och godkänd! Datum: ....

Namn:.. Godkänd av ....